

# Wavelets y Superresolución

Daniel Espinosa Pérez<sup>1</sup>      Joaquín Delgado<sup>2</sup>

Diciembre 2012

<sup>1</sup>Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas, UAM–Iztapalapa



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Motivación</b>	<b>3</b>
1.1. Wavelet discreta de Haar . . . . .	3
1.2. Denoising . . . . .	7
1.3. Compresión . . . . .	9
1.4. Wavelets de Daubechies: la wavelet daub4 . . . . .	9
<b>2. Señales</b>	<b>15</b>
2.1. Muestreo y reconstrucción de una señal . . . . .	15
2.2. Teorema del muestro . . . . .	17
2.3. Cuantización . . . . .	21
2.4. La transformada de Fourier discreta . . . . .	22
2.5. El espectro de potencia . . . . .	23
2.6. Análisis de Fourier para señales continuas . . . . .	24
2.7. La transformada de Fourier continua . . . . .	30
2.8. Principio de incertidumbre de Heissenberg . . . . .	31
2.9. La transformada de Fourier de tiempo corto (STFT) . . . . .	32
2.10. La transformada de Fourier discreta en 2D . . . . .	35
2.11. La transformada de Gabor . . . . .	37
<b>3. Filtros</b>	<b>41</b>
3.1. Señales LTI . . . . .	42
3.2. Filtro ideal . . . . .	45
3.3. Decimación . . . . .	46
3.4. Filtro espejo en cuadratura . . . . .	50

<b>4. Wavelets continuas y discretas</b>	<b>55</b>
4.1. La transformada wavelet continua . . . . .	55
4.2. Marcos . . . . .	63
4.3. Marcos de traslaciones y dilataciones . . . . .	66
4.4. Wavelets discretas . . . . .	68
4.5. Wavelets ortogonales . . . . .	69
4.6. La función de escalamiento . . . . .	70
4.7. La ecuación wavelet y la ecuación de escalamiento . . . . .	72
4.8. La wavelet de Haar . . . . .	73
4.9. La transformada wavelet rápida . . . . .	75
<b>5. Análisis multirresolución</b>	<b>77</b>
5.1. Definición del análisis multirresolución . . . . .	77
5.2. Bases ortonormales de aproximaciones multirresolución . . . . .	78
5.3. La función de escalamiento . . . . .	81
<b>6. Superresolución</b>	<b>95</b>
6.1. Resolución de una imagen . . . . .	95
6.2. Reconstrucción de una superresolución usando estimación con wavelet de Haar . . . . .	96
6.3. Aproximación de primer orden . . . . .	97
6.3.1. Ejemplos . . . . .	103
6.4. Algoritmos para la reconstrucción de una imagen de alta resolución . . . . .	104
6.5. Reconstrucción . . . . .	109
6.6. La función de reconstrucción . . . . .	111
6.7. La reconstrucción de la imagen . . . . .	113
6.7.1. Ejemplos . . . . .	115
<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>119</b>

# Introducción

El objetivo del presente trabajo es estudiar la transformada wavelet así como una aplicación al tratamiento de imágenes llamada superresolución. En el capítulo 1, se analiza la transformada wavelet discreta de Haar y Daubechies, sus propiedades y sus aplicaciones inmediatas como la compresión de información, el filtrado de ruido.

En el capítulo 2, estudiamos el muestreo y reconstrucción de señales, el teorema de Shannon-Whitaker que nos conduce a la manera de muestrear evitando el fenómeno del *aliasing*, así como la cuantización de señales. Posteriormente, estudiamos la transformada de Fourier discreta, la cual nos permite construir el espectro de frecuencias de una señal, la transformada de Fourier continua, dentro de la cual aparece el principio de incertidumbre de Heissenberg, el cual es una analogía al que originalmente se encuentra en mecánica cuántica y posteriormente la transformada de Fourier en tiempo corto. Después pasamos al caso bidimensional de la transformada de Fourier y cerramos el capítulo con la transformada de Gabor, la cua puede verse cómo una primera aproximación a la transformada wavelet continua.

En el capítulo 3, a manera de continuación de la teoría de señales vista en el capítulo 2, estudiamos brevemente la idea de filtro, la cual nos conduce a los sistemas LTI, dentro de los cuales aparece la transformada  $z$ , así como el filtro ideal y la decimación que a su vez requiere un submuestreo y cerramos el capítulo con los filtros espejo en cuadratura, que aparecerá posteriormente en la construcción de la transformada wavelet discreta.

En el capítulo 4, partimos de la definición formal de una wavelet continua así como la condición que debe cumplir para que exista su inversa que esta basada en la transformada de Fourier continua vista en el capítulo 2. Posteriormente introducimos el concepto de marco, el cual nos permitirá posteriormente construir la transformada wavelet discreta evitando así el problema de la redundancia. Finalmente introducimos el concepto de wavelet ortogonal, la función y la ecuación de escalamiento ejemplificando la construcción de la wavelet de Haar.

En el capítulo 5, estudiamos el concepto formal del análisis multirresolución, para lo que utilizaremos la transformada wavelet así como la función de escalamiento asociada, con el fin de descomponer un espacio de Hilbert de manera ortogonal, valiendonos muchas veces

de la transformada de Fourier.

En el capítulo 6, introducimos el concepto de superresolución y estudiamos dos maneras de abordar el problema de la reconstrucción de una superresolución. La primera metodología consiste en calcular los coeficientes de la transformada wavelet inversa bidimensional de una imagen, mediante una aproximación por polinomios de Taylor y posteriormente obtener la reconstrucción de la superresolución a partir de la transformada wavelet inversa. En la segunda metodología, se propone inicialmente una función de escalamiento, ahora utilizando el concepto de función refinable y su dual, para el cual se obtiene un sistema de ecuaciones, el cual da lugar a dos algoritmos, de los cuales el primero se puede aproximar directamente y el segundo incluye un parámetro de regularización.

# Capítulo 1

## Motivación

### 1.1. Wavelet discreta de Haar

La wavelet de Haar es la más sencilla que hay. En su forma discreta, las wavelets de Haar están relacionadas con una la llamada transformada de Haar. La transformada de Haar sirve como prototipo para todas las otras transformadas wavelets. En esta sección presentamos la versión discreta de la wavelet de Haar como motivación para que nos permitirá entender mejor la transformada wavelets más compleja.

Consideremos una señal discreta 1-dimensional de longitud finita

$$f_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

donde suponemos que  $N$  es par, con el fin de simplificar la presentación; en caso contrario podemos agregar un valor arbitrario de cero, por ejemplo. La transformada de Haar descompone señal discreta en dos subseñales de la mitad de su longitud. Una subseñal es un promedio móvil o tendencia, la otra subseñal es una diferencia móvil o fluctuación. La tendencia se define como

$$(1.1) \quad a_m = \frac{f_{2m-1} + f_{2m}}{\sqrt{2}},$$

para  $m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ . La fluctuación de la señal  $f$ , se define por la expresión:

$$(1.2) \quad d_m = \frac{f_{2m-1} - f_{2m}}{\sqrt{2}}$$

para  $m = 1, 2, \dots, N/2$ .

La transformada de Haar se realiza en varias etapas o niveles. El primer nivel es el mapeo  $\mathbf{H}_1$  definido por

$$(1.3) \quad f \xrightarrow{H_1} (a^1 | d^1)$$

de la señal discreta  $f$  en su primera tendencia  $a^1 = (a_m)_{m=1}^{N/2}$  y su primera fluctuación  $d^1 = (d_m)_{m=1}^{N/2}$ .

El mapeo  $H_1$  en (1.3) tiene inverso, el cual manda la señal transformada  $(a^1 | d^1)$  de regreso a la señal  $f$ , vía la expresión:

$$(1.4) \quad f_{2m+1} = \frac{a_m + d_m}{\sqrt{2}},$$

$$(1.5) \quad f_{2m} = \frac{a_m - d_m}{\sqrt{2}}$$

para  $m = 1, 2, \dots, N/2$ . En otras palabras,  $f_1 = (a_1 + d_1)/\sqrt{2}$ ,  $f_2 = (a_1 - d_1)/\sqrt{2}$ ,  $f_3 = (a_2 + d_2)/\sqrt{2}$ ,  $f_4 = (a_2 - d_2)/\sqrt{2}$ , y así sucesivamente, vease [22].

Una propiedad importante de la transformada de Haar es que conserva la energía de la señal, definida como

$$\epsilon_f = \sum_{i=1}^N f_i^2.$$

En efecto

$$f_{2m+1}^2 + f_{2m}^2 = \left( \frac{a_m + d_m}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{a_m - d_m}{\sqrt{2}} \right)^2 = a_m^2 + d_m^2,$$

(esta es la razón de haber elegido  $\sqrt{2}$  en vez de 2 como se haría, tomando promedios móviles a la manera usual) sumando para  $m = 1, 2, \dots, N/2$  obtenemos

$$\epsilon_f = \epsilon_{a^1} + \epsilon_{d^1}.$$

Observe que la energía  $\epsilon_f$  no es sino la norma al cuadrado de la secuencia finita  $f \in \mathbb{R}^N$  respecto al producto escalar usual:

$$\epsilon_f = f \cdot f.$$

Las secuencias de tendencia y fluctuación son elementos  $a^1 \in \mathbb{R}^{N/2}$ ,  $d^1 \in \mathbb{R}^{N/2}$ , donde  $\mathbb{R}^{N/2}$  se considera como espacio euclidiano con producto escalar usual; luego las propiedades anteriores de la transformada de Haar se pueden resumir diciendo que

$$\mathbf{H}_1: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N/2} \oplus \mathbb{R}^{N/2}$$



es una *isometría*, con inversa (1.4, 1.5).

Llevemos más allá la analogía introduciendo las llamadas *wavelets de Haar* primer nivel,  $W_m^1 \in \mathbb{R}^N$ ,  $m = 1, 2, \dots, N/2$ , definidas como

$$\begin{aligned}
 W_1^1 &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\
 W_2^1 &= \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\
 W_3^1 &= \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\
 &\vdots \\
 W_{N/2}^1 &= \left( 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Note la propiedad de *traslación*: la wavelet  $W_m^1$  es una traslación por un número par de lugares, de la *wavelet madre*  $W_1^1$  y cada una tiene promedio 0.

La fluctuación  $d^1$  se pueden escribir entonces como

$$d_m^1 = f \cdot W_m^1 \tag{1.7}$$

para  $m = 1, 2, \dots, N/2$ .

Análogamente, podemos expresar los valores de tendencia de primer nivel  $a^1$  como productos escalares con cierta señales elementales, llamadas *señales de escalamiento* primer nivel que se definen como

$$\begin{aligned}
 V_1^1 &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\
 V_2^1 &= \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\
 V_3^1 &= \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\
 &\vdots \\
 V_{N/2}^1 &= \left( 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

Entonces

$$a_m^1 = f \cdot V_m^1 \tag{1.9}$$

para  $m = 1, 2, \dots, N/2$ .

Nótese que las wavelets y señales de escalamiento satisfacen la relación de ortogonalidad

$$(1.10) \quad V_m^1 \cdot V_{m'}^1 = \delta_{m,m'}$$

$$(1.11) \quad W_m^1 \cdot W_{m'}^1 = \delta_{m,m'}$$

$$(1.12) \quad W_m^1 \cdot V_{m'}^1 = \delta_{m,m'}$$

Decimos que la familia de wavelets y señales de escalamiento forman un conjunto *biortonormal*.

De la misma manera, las señales de escalamiento de Haar de segundo nivel  $V_m^2 \in \mathbb{R}^{N/4}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N/4$ , se definen como

$$(1.13) \quad \begin{aligned} V_1^2 &= \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\ V_2^2 &= \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\ &\vdots \\ V_{N/4}^2 &= \left( 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

y las wavelets de Haar de segundo nivel  $W_m^2 \in \mathbb{R}^{N/4}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N/4$ , están definidas por:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} W_1^2 &= \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\ W_2^2 &= \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\ &\vdots \\ W_{N/4}^2 &= \left( 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Estas wavelets tienen soportes de longitud 4, ya que todas son traslaciones en múltiplos de cuatro unidades de tiempo de la primera wavelet  $W_1^2$ . También tienen todas energía 1 y valor promedio 0. Usando productos escalares, la fluctuación de segundo nivel  $d^2$  cumple que

$$(1.15) \quad d_m^2 = f \cdot W_m^2,$$

$$(1.16) \quad a_m^2 = f \cdot V_m^2$$

para  $m = 1, 2, \dots, N/4$ . De esta manera la transformada de Haar de segundo nivel es la aplicación

$$(1.17) \quad f \mapsto (a^2 | d^2).$$

Si aplicamos la transformada de Haar de primer nivel a la señal  $f$  obtenemos:

$$f \mapsto (a^1 | d^1)$$

y si aplicamos la transformada de Haar de segundo nivel a la tendencia, obtendremos

$$\mathbb{R}^N \ni f \mapsto (a^2 | d^2 | d^1) \in \mathbb{R}^{N/4} \oplus \mathbb{R}^{N/4} \oplus \mathbb{R}^{N/2}.$$

Dicho de otra manera, hemos descompuesto la señal en una señal de tendencia y dos señales de fluctuación:

$$f = a^2 + d^2 + d^1.$$

El procedimiento se puede generalizar considerando wavelets y señales de escalamiento de niveles mayores. Naturalmente como la señal es finita, hay un límite para este procedimiento, obteniendo así el *análisis multiresolución* de la señal original al un nivel  $k$ :

$$(1.18) \quad f = a^k + d^{k-1} + \dots + d^2 + d^1.$$

El ejemplo mostrado en la figura 1.1 muestra análisis multiresolución al nivel 6 del fonema “a”, usando la transformada de Haar. Aquí hemos usado la interfase gráfica `wavemenu` de Matlab. La señal original está indicada por  $s$ ,  $a_6$  es la tendencia y  $d_1$  a  $d_6$  son los detalles sucesivos. Como indica el título de la figura, la señal  $s$  se obtiene como superposición de la señal de tendencia y los detalles:  $s = a_6 + d_1 + \dots + d_6$ . Observe que la escala del detalle  $d_6$  es un orden de magnitud menor que la señal original.

La teoría de wavelets se puede usar con gran ventaja en dos tareas importantes en el procesamiento de señales: Filtrado del ruido (*denoising*) y compresión. En las siguientes secciones ilustramos con la misma señal, estos dos procedimientos.

## 1.2. Denoising

El análisis multiresolución de la señal (1.18) se puede usar con ventaja para filtrar el ruido de una señal. Ya que la energía se reparte entre la señal de tendencia  $a^k$  y las fluctuaciones de diversos órdenes, es de esperar que las fluctuaciones de orden más pequeño,  $d^1$ ,  $d^2$ , etc.,

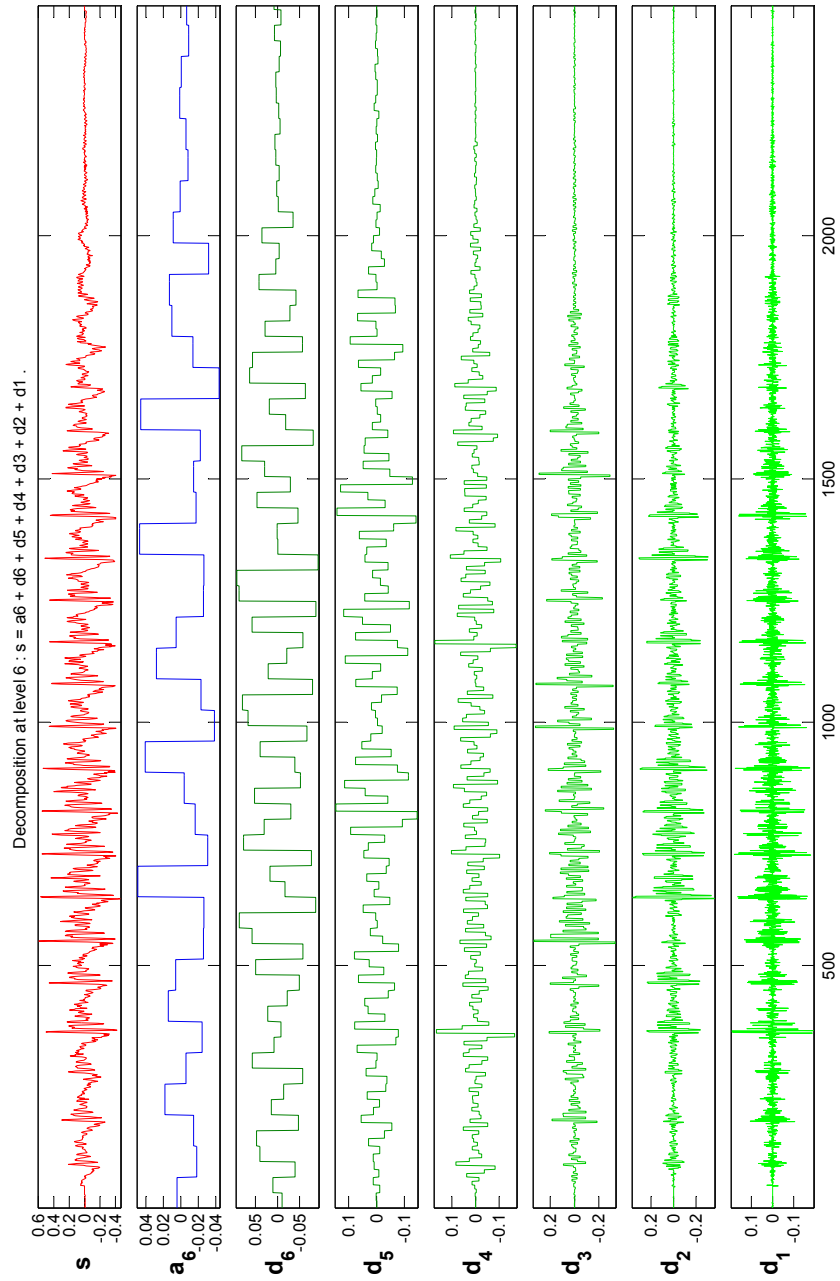


Figura 1.1: Análisis multiresolución del fonema “a”

contengan esencialmente señales aleatorias, es decir ruido. En la teoría de wavelets el filtrado del ruido se puede hacer reteniendo sólo un porcentaje de las señales de fluctuación [22].

En la figura 1.2, se muestra en análisis multirresolución del fonema “a” mostrando los coeficientes de detalle  $d_1-d_6$ ; la señal filtrada se muestra superpuesta en color guinda sobre la señal original en rojo, de la que se han suprimido completamente las componentes  $d^1$  y  $d^2$  del análisis MRA.

### 1.3. Compresión

La compresión de una señal se puede realizar reteniendo tan sólo los coeficientes principales de tendencia  $a^k$  y sólo algunos de los últimos coeficientes de fluctuación de órdenes más altos  $d^{k-1}$ ,  $d^{k-2}$ , etc. [22]. Este proceso se llama compresión y ha sido uno de los grandes éxitos prácticos en la teoría de wavelets. El formato JPG 2000 permite comprimir una imagen con un alto porcentaje de compresión no logrado antes por métodos estándar, como la transformada de Fourier en coseno, por ejemplo. En la figura 1.3 se muestra la señal del fonema “a” comprimida por un factor de 80 % aproximadamente. La señal comprimida, que se muestra en la misma figura, retiene sin embargo, la mayor parte de la estructura de la señal original.

El diagrama que aparece en las figuras 1.2 y 1.3 que llevan el encabezado “Original coefficients” se llama *diagrama tiempo-frecuencia*; en el eje horizontal aparece el tiempo (en unidades enteras del intervalo de muestreo), en el eje vertical las frecuencias componentes de la señal en el instante de tiempo correspondiente. Se puede pensar que la señal original, no estacionaria, en una ventana temporal  $t, t + \Delta t$  esta compuesta por las distintas frecuencias a lo largo del eje vertical en esa banda, los colores más claro corresponden a frecuencias más altas. En este sentido, el análisis multirresolución generaliza la técnica conocida como STFT (Short Time Fourier Transform) con la ventaja que la ventana temporal se puede hacer arbitrariamente pequeña (veremos que en realidad hay una limitante análoga al principio de incertidumbre de Heissenberg, pues si queremos una alta resolución temporal debemos pagar el precio de admitir una resolución en frecuencia pobre).

### 1.4. Wavelets de Daubechies: la wavelet daub4

Existen una gran colección de transformadas wavelets descubiertas por Ingrid Daubechies. Las transformadas wavelets de Daubechies estan definidas en la misma forma que las transformadas wavelets de Haar, calculando los promedios y tendencias a través de productos escalares, con wavelets y señales de escalamiento. Para las transformadas wavelets de Dau-

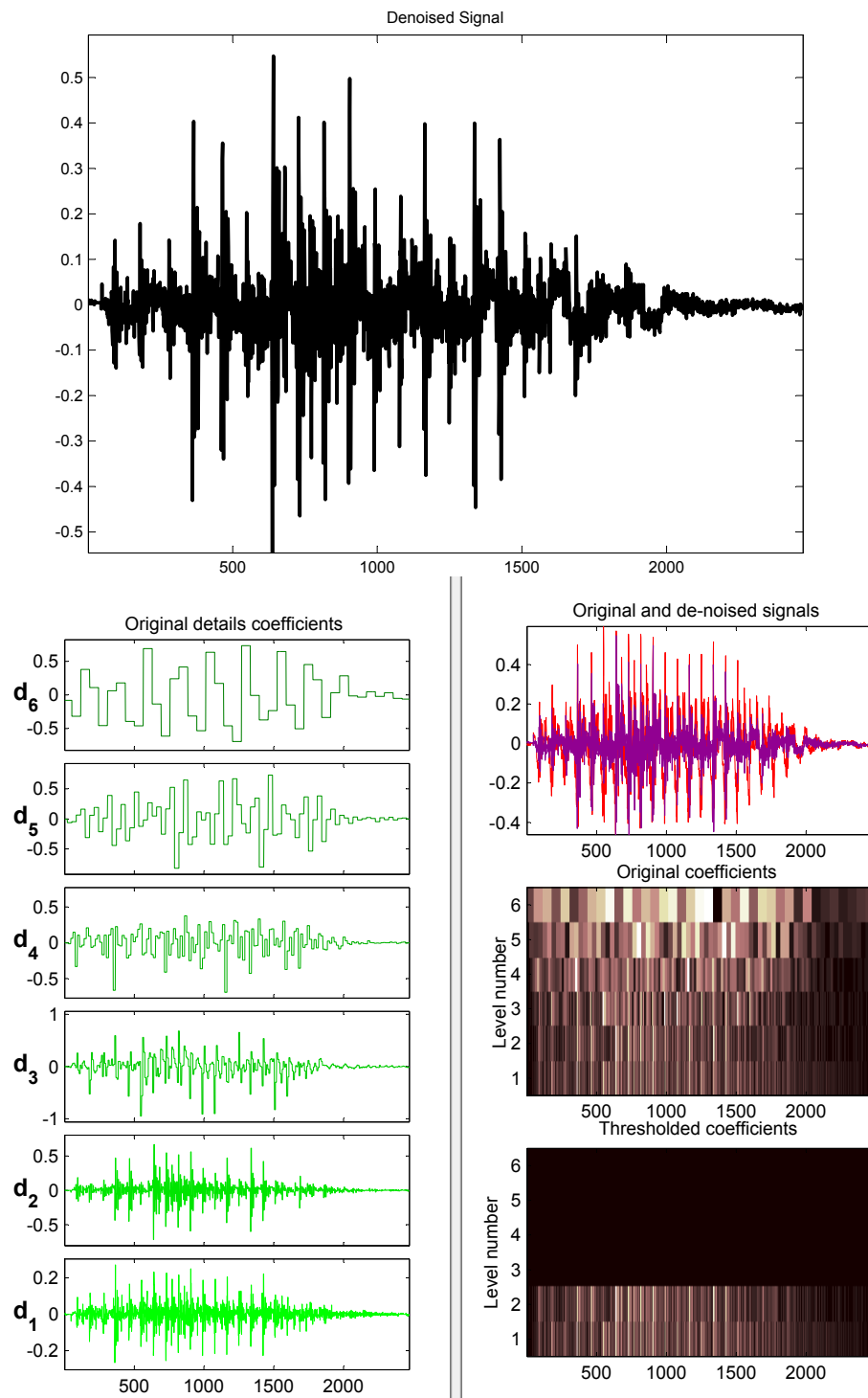


Figura 1.2: Filtrado de ruido de una señal y la señal filtrada

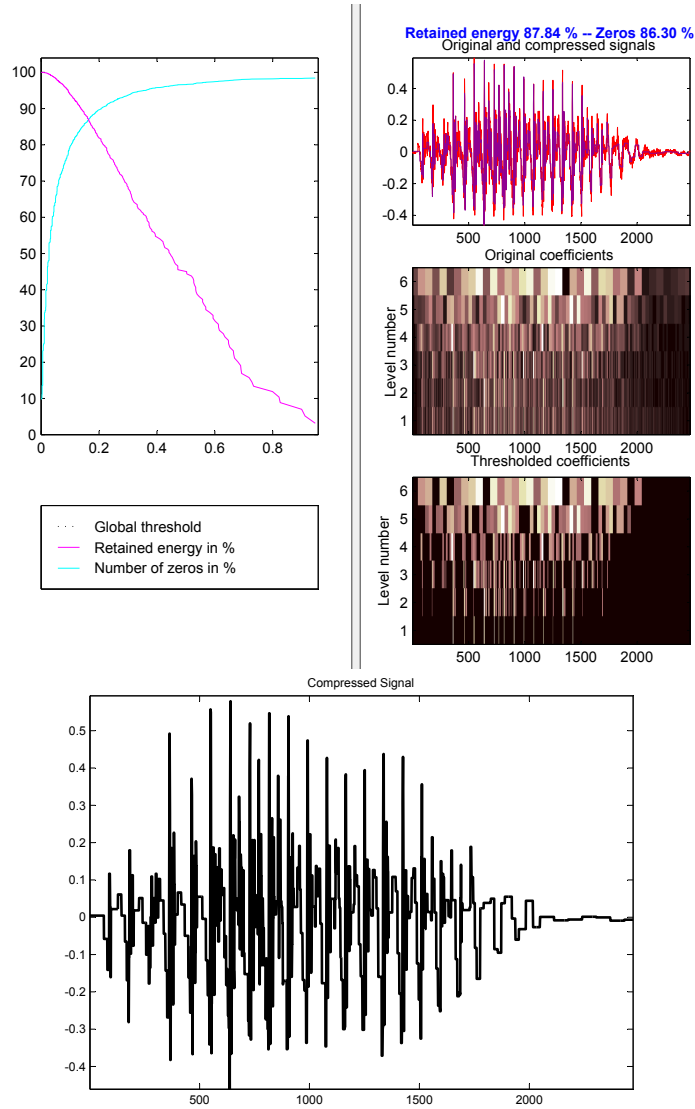


Figura 1.3: Compresión del fonema “a” usando wavelets de Haar y la señal comprimida.

bechies, las wavelets y señales de escalamiento tienen un soporte mayor, es decir, que producen los promedios y las diferencias por medio de más valores de la señal. Este cambio proporciona una mejora enorme de la capacidad de estas nuevas transformaciones, las cuales nos brindan un conjunto de herramientas potentes para el procesamiento de señales.

Hay muchas transformadas de Daubechies, pero todas son muy similares. En esta sección nos concentraremos en la más simple, la transformada wavelet `daub4`. La transformada wavelet de Daubechies se define esencialmente del mismo modo que la transformada wavelet de Haar. Para ello se definen las constantes de escalamiento [22]:

$$(1.19) \quad \alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \alpha_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \alpha_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \alpha_4 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

y las señales de escalamiento

$$(1.20) \quad V_1^1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 0, \dots, 0)$$

$$(1.21) \quad V_2^1 = (0, 0, 0, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 0, \dots, 0)$$

$$(1.22) \quad V_3^1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 0, \dots, 0)$$

$$(1.23) \quad \vdots = \vdots$$

$$(1.24) \quad V_{N/2-1}^1 = (0, 0, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

$$(1.25) \quad V_{N/2}^1 = (\alpha_3, \alpha_4, 0, \dots, \alpha_1, \alpha_2).$$

Las wavelets `daub4` se definen en términos de los números de wavelet `daub4` [22]

$$(1.26) \quad \beta_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{3} - 3}{4\sqrt{2}}, \quad \beta_3 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \beta_4 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Observe que satisface la relación

$$\beta_1 = \alpha_4, \quad \beta_2 = -\alpha_3, \quad \beta_3 = \alpha_2, \quad \beta_4 = -\alpha_1.$$

Ahora para una señal  $f$  tiene de longitud  $N$  par, la transformada `daub4` de primer nivel es el mapeo  $f \xrightarrow{D_1} (a^1|d^1)$  de la señal  $f$  en su primera subseñal de tendencia  $a^1$  y su primera subseñal de fluctuación  $d^1$ , donde

$$(1.27) \quad a_m^1 = f \cdot V_m^1$$

y análogamente

$$(1.28) \quad d_m^1 = f \cdot W_m^1.$$



La transformada wavelet `daub4`, al igual que la de Haar, se puede extender a niveles múltiples tantas veces como la longitud de la señal lo permita. El análisis multirresolución basado en las wavelets `daub4` tiene las mismas propiedades funcionales que la wavelet de Haar, i.e. que el mapeo  $D^1$  es una isometría.

Las wavelets `daub4` las mencionamos aquí por dos razones: (a) para mostrar que el análisis multirresolución es general y (b) porque sus múltiples aplicaciones. Por el momento la wavelets de Haar y `daub4` serán suficientes para motivar los desarrollos que se harán en las siguientes secciones.



# Capítulo 2

## Señales

En las áreas de comunicaciones, ingeniería electrónica y biomédica, una señal es una cantidad escalar que cambia con respecto al tiempo, por lo que podemos escribirla como una función real de una variable. Una señal puede observarse a cualquier instante de tiempo y la amplitud puede tomar un valor arbitrario en principio. A una señal de este tipo se le llama *continua en el tiempo*, o *señal análoga*.

Si tomamos la señal en instantes dados de tiempo, permitiendo que la amplitud tome cualquier valor, entonces la señal es *continua en amplitud y discreta en el tiempo*.

Otro tipo de señal que esta definida para todos los tiempos, pero solo puede tomar ciertos valores de un conjunto dado, se le llama *discreta en amplitud y continua en el tiempo*.

Las señales que están definidas en instantes dados del tiempo y que solo pueden tomar valores de un conjunto dado, se les llama *discreta en amplitud*. A este tipo de señales se le llama *señal digital*.

### 2.1. Muestreo y reconstrucción de una señal

El proceso de pasar de una señal análoga continua en el tiempo a una señal discreta en el tiempo, se le llama *muestreo* [17]. Existen varias maneras de muestrear una señal análoga. Una de ellas puede realizarse multiplicando la señal continua en el tiempo por un tren de pulsos unitarios, es decir,

$$(2.1) \quad x(n) = x_\alpha(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

donde  $x(n)$  es la señal discreta en el tiempo obtenida muestreando la señal análoga  $x_\alpha(t)$  cada  $T$  segundos. Al periodo de tiempo  $T$  se le llama *periodo de muestreo*. Generalmente se

toma constante por lo que, el muestreo obtenido es equidistante. Al recíproco  $1/T = f_s$  se le llama *frecuencia de muestreo* y esta relacionado con la *tasa de muestreo*  $\omega_s$ , es decir

$$(2.2) \quad f_s = \frac{1}{T} = \frac{\omega_s}{2\pi}.$$

El muestreo periódico establece una relación entre las variables  $t$  y  $n$  de señales continuas y discretas en el tiempo [15]. Estas variables están linealmente relacionadas por el periodo de muestreo  $T$  o por la tasa de muestreo  $f_s = 1/T$ :

$$(2.3) \quad t = nT = \frac{n}{f_s},$$

por lo tanto, debe existir una relación entre la frecuencia continua  $F$  (o bien  $\Omega$ ) de señales análogas y la frecuencia discreta  $f$  (ú  $\omega$ ) para señales discretas en el tiempo. Consideremos una señal sinusoidal ó *sinusoide* de la forma:

$$(2.4) \quad x_\alpha(t) = A \cos(2\pi Ft + \theta).$$

Luego la muestreamos periódicamente a la razón  $f_s = 1/T$  y obtenemos

$$(2.5) \quad x_\alpha(nT) = x(n) = A \cos(2\pi FnT + \theta) = A \cos\left(\frac{2\pi nF}{f_s} + \theta\right).$$

Podemos escribir una señal sinusoidal discreta en el tiempo como

$$(2.6) \quad x(n) = A \cos(\omega n + \theta), \quad -\infty < n < \infty,$$

en donde,  $n \in \mathbb{Z}$  es el *número de muestra*,  $A$  es la amplitud,  $\omega$  es la frecuencia en radianes por muestra y  $\theta$  es la fase en radianes. Por otro lado,  $\omega$  puede reescribirse en términos de la frecuencia  $f$  como  $\omega = 2\pi f$ , entonces

$$(2.7) \quad x(n) = A \cos(2\pi fn + \theta), \quad -\infty < n < \infty,$$

Si comparamos (2.7) con (2.5), veremos que

$$(2.8) \quad f = \frac{F}{f_s}$$

o equivalentemente

$$(2.9) \quad \omega = \Omega T$$

A la relación (2.8) se le denomina *frecuencia normalizada* o *relativa*.

Cabe señalar que el rango de  $F$  y el de  $\Omega$  para sinusoides de tiempo continuo es

$$(2.10) \quad \begin{aligned} -\infty < F < \infty \\ -\infty < \Omega < \infty \end{aligned}$$

mientras que para sinusoides en tiempo discreto es

$$(2.11) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \\ -\pi < \omega < \pi \end{aligned}$$

Si suponemos que  $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$ , entonces la frecuencia  $f$  de  $x(n)$  esta en el rango  $-1/2 \leq f \leq 1/2$  la cual corresponde al rango de frecuencias de las señales de tiempo discreto, así que la relación entre  $f_0$  y  $F_0$  es inyectiva, y por lo tanto es posible reconstruir la señal original  $x_\alpha(t)$  a partir de sus muestras  $x(n)$ .

Por otro lado, si los sinusoides

$$(2.12) \quad x_\alpha(t) = A \cos(2\pi F_k t + \theta) \quad F_k = F_0 + k f_s, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

se muestrean a una razón de  $F_s$ , entonces la frecuencia  $F_k$  esta fuera del rango fundamental de frecuencias  $-f_s/2 \leq F \leq f_s/2$ . Así que la señal muestreada es

$$(2.13) \quad x(n) = x_\alpha(nT) = A \cos\left(2\pi \frac{F_0 + k f_s}{f_s} n + \theta\right)$$

$$(2.14) \quad = A \cos(2\pi f_0 n + \theta).$$

Por lo tanto, hay una infinidad de sinusoides de tiempo continuo que están representadas por la misma señal de tiempo discreto. Consecuentemente, podemos decir que las frecuencias  $F_k = F_0 + k f_s$  con  $-\infty < k < \infty$  y  $k$  entero, son indistinguibles de la frecuencia  $F_0$  después de muestrear, apareciendo así el fenómeno llamado *aliasing*. Analizaremos este fenómeno en el contexto del teorema de Shannon-Whitaker.

## 2.2. Teorema del muestro

El teorema del muestreo establece justifica la operación mediante la cual una señal continua en el tiempo puede reemplazarse por una sucesión discreta de valores. El teorema establece que una señal puede reconstruirse perfectamente a partir de una sucesión de sus muestras si la tasa de muestreo es mayor que cierto valor límite llamado *frecuencia de Nyquist* [17].

Si tenemos una señal análoga, el *ancho de banda* se define como la longitud del rango de frecuencias en el cual está concentrada la mayor parte de la potencia de la señal; el ancho de banda generalmente se mide en Hertz (Hz). Por ejemplo, en conexiones a Internet, el ancho de banda se mide en megabits por segundo (Mbps).

El teorema de Nyquist–Shannon afirma que es posible reconstruir una señal, si la frecuencia de muestreo es mayor que el doble de la frecuencia máxima de la señal. La máxima frecuencia componente de la señal se llama el ancho de banda. Si  $\nu_s$  es la frecuencia de muestreo,  $\nu_{Nyq} = \nu_s/2$  se llama la *frecuencia de Nyquist* [17]. Por ejemplo, si el ancho de banda de una señal es de 50 Hz, debemos muestrear al menos a 100Hz, para poder reconstruir la señal.

Consideremos una señal continua  $f(t)$ . El muestreo a intervalos regulares de tiempo  $T$  se puede representar por la suma de deltas de Dirac,

$$f_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT).$$

En realidad esto quiere decir que la función muestreada  $f_d(t)$  tiene por valor

$$f_d(t) = \begin{cases} f(nT) & \text{si } t = nT, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como la transformada de Fourier de  $\delta(t - nT)$  es  $e^{-inT\omega}$ , entonces la transformada de Fourier de  $f_d(t)$  es

$$(2.15) \quad \hat{f}_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-inT\omega}.$$

Para entender cómo reconstruir  $f(t)$  a partir de su versión muestral  $f_d(t)$  primero veamos la relación entre sus transformadas de Fourier

**Proposición 2.1.** [8] *La transformada de Fourier de la señal discreta obtenida por muestreo de la señal continua a intervalos regulares de longitud  $T$  es*

$$(2.16) \quad \hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right).$$

*La relación (2.16) se sigue de (2.15).*

Observe que el lado derecho es  $2\pi$  periódico. El teorema anterior nos dice que muestrear a intervalos de tiempo  $T$  equivale a promediar la transformada de Fourier  $\hat{f}$  sobre todas sus traslaciones. Este resultado se debe a Whittaker [1935] quien lo publicó en un libro sobre interpolación y fue redescubierto por Shannon [1949] en el contexto de la teoría de la comunicación.

Consideremos el problema de reconstruir una señal de banda limitada a partir de sus valores sobre los enteros. Estas funciones son de la forma

$$(2.17) \quad f(t) = \int_{-\lambda}^{\lambda} F(\xi) e^{2\pi i t \xi} d\xi$$

en donde  $F \in L^1(-\lambda, \lambda)$  y establecemos que  $F(\xi) = 0$  cuando  $|\xi| > \lambda$ . El número  $\lambda$  es el ancho de banda. El teorema del muestro de Shannon es la siguiente identidad [14]

$$(2.18) \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \quad t \in \mathbb{R}$$

en donde la serie se toma como el límite de las sumas parciales simétricas y la fracción es igual a 1 cuando  $n = t$ .

El siguiente ejemplo muestra que la relación (2.18) no necesariamente se cumple para cualquier ancho de banda.

### Ejemplo 2.2.

$$f(t) = \left( \frac{\text{sen } \pi t}{\pi t} \right) = \int_{-1}^1 (1 - |\xi|) e^{2\pi i t \xi} d\xi$$

es una señal de banda limitada con  $\lambda = 1$ . Como  $f$  vale cero sobre los enteros, no podemos recuperar  $f$  a partir de  $\{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para la validez de (2.18).

**Teorema 2.3** (Whittaker, Shannon, Boas). *Supongamos que  $F \in L^1(-\lambda, \lambda)$  define una señal de banda limitada con  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ . Entonces la fórmula del muestro de Shannon (2.18) se cumple. De manera general, si  $\lambda > \frac{1}{2}$  podemos estimar*

$$\left| f(t) - \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \right| \leq 2 \int_{|\xi| > \frac{1}{2}} |F(\xi)| d\xi.$$

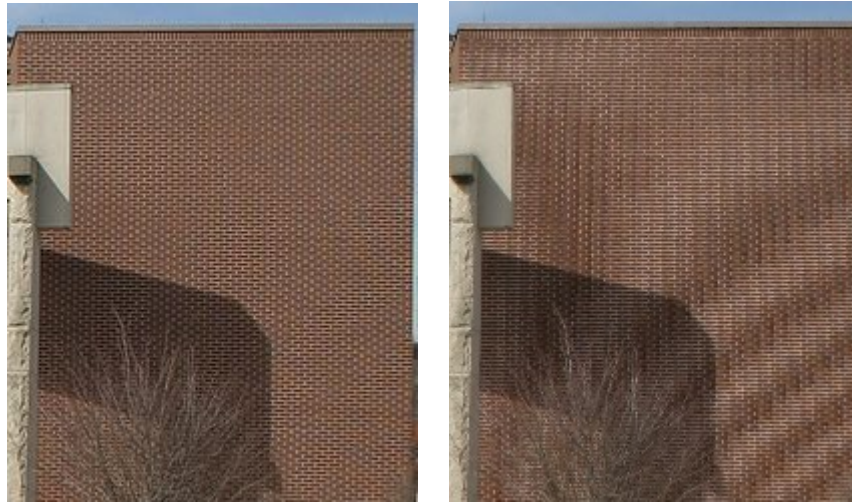


Figura 2.1: Efecto Moiré. (a) Imagen muestreada a una frecuencia por arriba de la frecuencia de Nyquist. (b) Imagen muestreada a una frecuencia por abajo de la frecuencia de Nyquist. Imágenes tomadas de [http://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon\\_sampling\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon_sampling_theorem).

La demostración puede revisarse en [14].

Las funciones que satisfacen las hipótesis del teorema de Whitaker-Shannon se llaman de *banda limitada*.

Si el intervalo de muestreo es  $T$ , a  $f_s = 1/T$  se llama la *frecuencia de muestreo*. Si la frecuencia de muestreo es baja, puede ocurrir el llamado efecto de *aliasing* (hay más de una señal que corresponde a la misma muestra, o sea hay un alias). Ejemplos de aliasing son comunes en el cine o la televisión cuando vemos las ruedas de una carreta o de un auto girar en sentido inverso del que deberían; esto ocurre porque la frecuencia de cuadros por segundo de la cámara es menor que la velocidad de rotación de la rueda. En imágenes, el fenómeno de aliasing puede presentar de diversas maneras como el efecto Moiré que se muestra en la figura 2.1. El ancho de banda puede pensarse como la máxima frecuencia de ladrillos por unidad de longitud horizontal o vertical del adoquinado de ladrillos, en tanto que la frecuencia de muestreo es el vector de número de píxeles en la horizontal y la vertical por unidad de área.

En la figura 2.2 se presentan otro ejemplo de aliasing en una señal 1-dimensional. La señal de baja frecuencia es  $f_1(t) = \text{sen}(2\pi t)$ ; la señal de alta frecuencia es  $f_2(t) = \text{sen}(22\pi t)$ . Ambas señales son muestreadas a una frecuencia de  $\nu_s = 10$  Hz. El ancho de banda de la primera señal es de 1 Hz y de la segunda de 11 Hz, de modo que la segunda señal no se espera que pueda ser recuperada a esta frecuencia de muestreo. De hecho, la señal  $f_1$  es un alias de



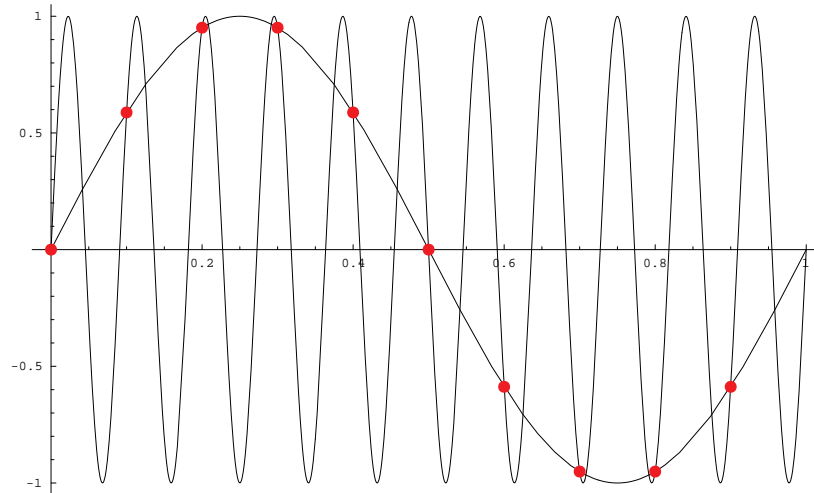


Figura 2.2: Ejemplo de aliasing.

la señal  $f_2$ .

## 2.3. Cuantización

El proceso de muestreo descrito anteriormente es el proceso de convertir una señal continua en el tiempo en una señal discreta en el tiempo, mientras que la cuantización es la conversión de una señal la cual es *continua en amplitud* en una señal que es *discreta en amplitud* [17].

Podemos ver a la cuantización como clasificar el nivel de una señal continuamente valuada sobre ciertas bandas. En muchos casos, estas bandas están espaciadas con el mismo tamaño sobre un rango dado.

A cada banda se le asigna un código o un valor numérico. La mayoría de sistemas usan el código binario, es decir, el número de intervalos de cuantización  $N$  es:

$$(2.19) \quad N = 2^n$$

donde  $n$  es el tamaño de palabra del código binario. Por ejemplo, para representar imágenes en escala de grises, se usa  $n = 8$  bits que proporcionan una resolución de  $N = 256$  bandas, y para representar imágenes a color, se puede usar  $n = 16$  bits, el cual nos da  $N = 65536$  colores. Entre mayor sea el número de bandas, mayor será la resolución que obtengamos.

## 2.4. La transformada de Fourier discreta

Consideremos una señal discreta  $x_n, n = 0, 2, \dots, N-1$ . Esta señal podría venir de muestrear una señal continua  $f(t)$  a una frecuencia de muestreo  $\nu_s$  de modo que si  $\Delta t = 1/\nu_s$  entonces  $x_n = f(n\Delta t)$ , aunque para definir la transformada de Fourier discreta no es necesario suponer que la señal provenga de un muestreo.

La transformada discreta de Fourier se define como [15]:

$$(2.20) \quad X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi n k / N}.$$

Observe que la sucesión de número complejos  $X_k$  está definida para todo índice  $k$  entero aunque es periódica de período  $N$ :

$$(2.21) \quad X_{k+N} = X_k.$$

En particular

$$(2.22) \quad X_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n = \sqrt{N} \bar{x}$$

que se conoce como la componente DC.

A menudo se usan otras convenciones distintas a (2.20). La principal razón de usar esta definición es que se satisface la identidad de Parseval:

$$(2.23) \quad \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2,$$

que significa que la transformada de Fourier discreta (DFT)

$$\mathcal{F} [(x_n)_{n=0}^{N-1}] = (X_k)_{k=0}^{N-1},$$

es una isometría.

La transformada de Fourier discreta inversa permite recobrar la señal original:

$$(2.24) \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2\pi i n k / N}.$$

Observe que el lado derecho de esta expresión representa la extensión periódica  $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de la señal original  $(x_n)_{n=0}^{N-1}$ :

$$\tilde{x}_{n+N} = \tilde{x}_n, \tilde{x}_n = x_n, \text{ si } 0 \leq n \leq N.$$

## 2.5. El espectro de potencia

Si  $x_j, j = 1, 2, \dots, N$  es una señal discreta y  $X_k$  su transformada de Fourier discreta (2.27), el módulo al cuadrado es el espectro de potencia [15]:

$$P_k = |X_k|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Naturalmente de (2.21) se sigue que

$$P_{k+N} = P_k.$$

Si, como sucede a menudo, la señal original ( $x_n$ ) es real, entonces de (2.24) se sigue que  $X_k = \bar{X}_k$  y por lo tanto

$$(2.25) \quad P_{-k} = P_k.$$

También, de (2.22) se sigue que

$$P_0 = N\bar{x}^2$$

donde  $\bar{x}$  es el promedio de la señal. Dada la propiedad de periodicidad (2.21) será suficiente el espectro de potencia en el intervalo simétrico

$$P_k, \quad k = -N/2, -N/2 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2.$$

En ocasiones el promedio de la señal es mucho mayor que el de los armónicos subsecuentes y se omite el nivel DC:

$$P_k, \quad k = 1, \dots, N/2.$$

A menudo se trabaja con el espectro de potencia en escala logarítmica

$$\log_{10}(P_k) = 2 \log_{10}(|X_k|).$$

El espectro de potencia referido a una escala arbitraria  $R$  se mide en decibeles

$$2 \log_{10} \left( \frac{|X_k|}{R} \right) \quad \text{db.}$$

Si la señal discreta proviene de muestrear una señal continua a una frecuencia de muestreo  $f_s$ , entonces el índice  $k$  del espectro de potencia corresponde a la componente de frecuencia

$$f_k = k \frac{f_s}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

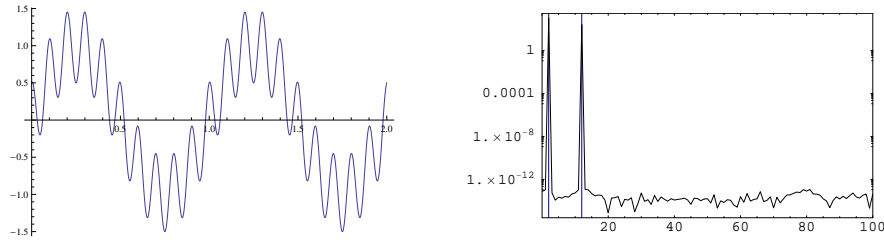


Figura 2.3: Señal  $f(t) = 2 \cos(4\pi t) + 0.5 \text{sen}(24\pi t)$  muestreada a 1024Hz y su espectro de potencia.

Observe en particular que  $f_{N/2} = f_{Nyq}$  es la frecuencia de Nyquist.

Por el teorema de Parseval

$$(2.26) \quad \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} P_k$$

De modo que el espectro de potencia nos da la información sobre la contribución en energía de cada uno de los modos (frecuencias) que constituyen la señal en el rango de frecuencias que son detectables con el muestreo  $0 \leq f_k \leq f_{Nyq}$ .

En la figura 2.3 se muestra la señal  $f(t) = 2 \cos(4\pi t) + 0.5 \text{sen}(24\pi t)$  muestreada con  $N = 1024$  puntos en el intervalo  $[0, 1]$  es decir con frecuencia de muestreo  $f_s = 1024$  Hz. Las frecuencias componentes de la señal son  $f_1 = 2$  y  $f_2 = 12$ . Obviamente  $f_{Nyq} = 512 > f_1, f_2$  sin violar el criterio de muestreo. En la misma figura se muestra el espectro de potencia en escala logarítmica. Las líneas verticales muestran las frecuencias componentes de la señal.

## 2.6. Análisis de Fourier para señales continuas

En el análisis de Fourier se busca descomponer una señal compleja en componentes sinusoidales simples. Dada una función  $f(x)$  definida para  $x \in [0, 2\pi]$  su serie de Fourier asociada se define como

$$(2.27) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)$$

donde los coeficientes de Fourier son:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \text{sen}(nt) dt.$$

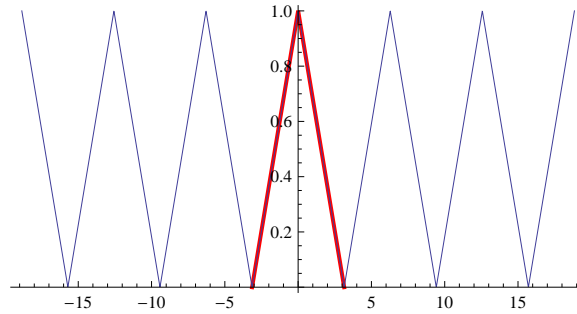


Figura 2.4: Función definida en  $[-\pi, \pi]$  (línea gruesa) y su extensión periódica (línea tenue).

El símbolo  $=$  en (2.27) ha sido motivo de discusión por muchos años, pues no siempre significa una igualdad en el sentido usual. Por ejemplo; el lado derecho es una serie que no siempre es convergente y aún cuando lo sea para un valor particular de  $x$  no siempre coincide con el valor de  $f(x)$  del lado izquierdo. Si el lado derecho es convergente para todos los valores de  $x$ , el lado izquierdo sólo está definido en principio para  $x \in [0, 2\pi]$ . Una discusión completa hace necesario hablar de distintos tipos de convergencia: convergencia puntual, uniforme, absoluta, en  $L^p$ , Cesaro–sumable, etc. Para concretar mencionamos el siguiente resultado que será suficiente para nuestros propósitos

**Teorema 2.4** (Dirichlet). [14] Si  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua a trozos y acotada, entonces la serie de Fourier converge al valor promedio

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

En las hipótesis del teorema anterior, el lado derecho de (2.27) define la extensión periódica de  $f(x)$ , definida por

$$\tilde{f}(x) = f(x \bmod 2\pi),$$

véase por ejemplo la figura 2.4.

Tomando la serie finita en (2.27) obtenemos aproximaciones sucesivas a la función  $f(x)$ ,

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

En la figura 2.5 se muestran dos funciones y sus respectivas aproximaciones de Fourier para  $N = 4, 8, 15, 30$ . En la columna izquierda se muestran las aproximaciones de Fourier sobrepuestas con la gráfica de una función discontinua que además presenta transitorios (las

ondulaciones en los extremos de la gráfica). Se observa claramente el fenómeno de Gibbs: En los puntos de discontinuidad las aproximaciones de Fourier tienden a oscilar; en dichos puntos se ve claramente cómo la serie converge al valor promedio de los límites laterales, consecuente con el teorema de Dirichlet.

En la figura 2.6 se muestran los errores correspondientes a las distintas aproximaciones de Fourier. Es de notar que el error sigue siendo grande aún para  $N = 30$  para la señal con discontinuidades. Esto muestra que el desarrollo de Fourier no es tan bueno cuando la señal posee transitorios.

Otro inconveniente notable del análisis de Fourier es que no está bien adaptado para el estudio de señales que no sean estacionarias. De manera informal, una señal  $f(t)$  es estacionaria, si su perfil en ventanas de diferentes ventanas de tiempo es el mismo. Recordemos que una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  es estacionaria si la función de autocorrelación

$$R(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - s_1)f(t - s_2)dt,$$

depende solo de  $s_2 - s_1$ . En este caso

$$R(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t - s)dt$$

es la función de autocorrelación.

En la Figura 2.7 se muestra la señal  $f(t) = 2 \cos(4\pi t) + 0.5 \sin(24\pi t)$  en el intervalo  $[-L, L]$ , con  $L = \pi$ ; a la derecha se muestra la señal  $f_\delta$  modificada por un salto de altura 6 en el intervalo  $[-\delta, \delta]$ ; es decir

$$f_\delta(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } |t| > \delta \\ 6 & \text{si } |t| \leq \delta \end{cases}$$

con  $\delta = 0.1$ .

Se muestrean  $f(t)$  y  $f_\delta(t)$  en  $N = 1024$  puntos igualmente espaciados en el intervalo  $[-L, L]$ , lo cual da un intervalo de muestreo  $\Delta t_s = 2L/N = \pi/512$  y por lo tanto una frecuencia de muestreo  $f_s = 1/\Delta t_s \approx 164$ <sup>1</sup> En la segunda fila se muestran los espectros de potencia de las señales correspondientes. Los picos bien definidos del espectro de  $g$  indican que posee componentes bien definidos de frecuencias  $f = 2, 12$ . Para la señal  $f(t)$  el espectro de potencia presenta ondulaciones sobrepuestas al espectro de  $g(t)$

<sup>1</sup>Teorema de Nyquist–Shanon: Si una señal  $f(t)$  contiene frecuencias no más altas que  $B$  entonces la señal está completamente determinada por una serie muestral de puntos espaciados  $1/(2B)$ . En nuestro caso la máxima frecuencia componente de la señal es 12, luego el intervalo de muestreo mínimo es  $1/24$ , en nuestro caso  $\Delta f_s = 2L/N = \pi/512 \ll 1/24$ .

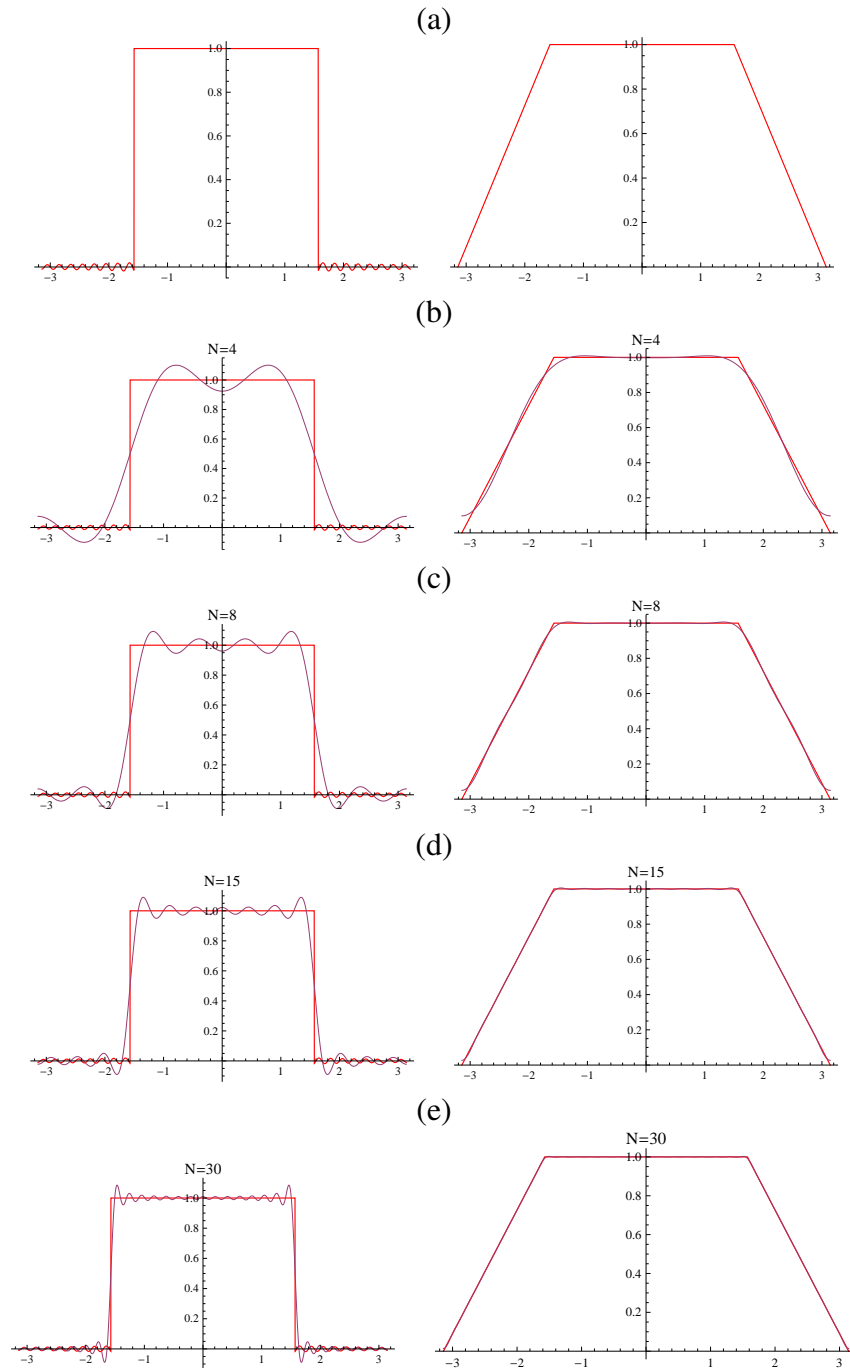


Figura 2.5: Aproximaciones de Fourier para dos funciones: (a) Salto (izq.) y rampa (der.); (b)  $N = 4$ ; (c)  $N = 8$ ; (d)  $N = 15$ ; (e)  $N = 30$ .

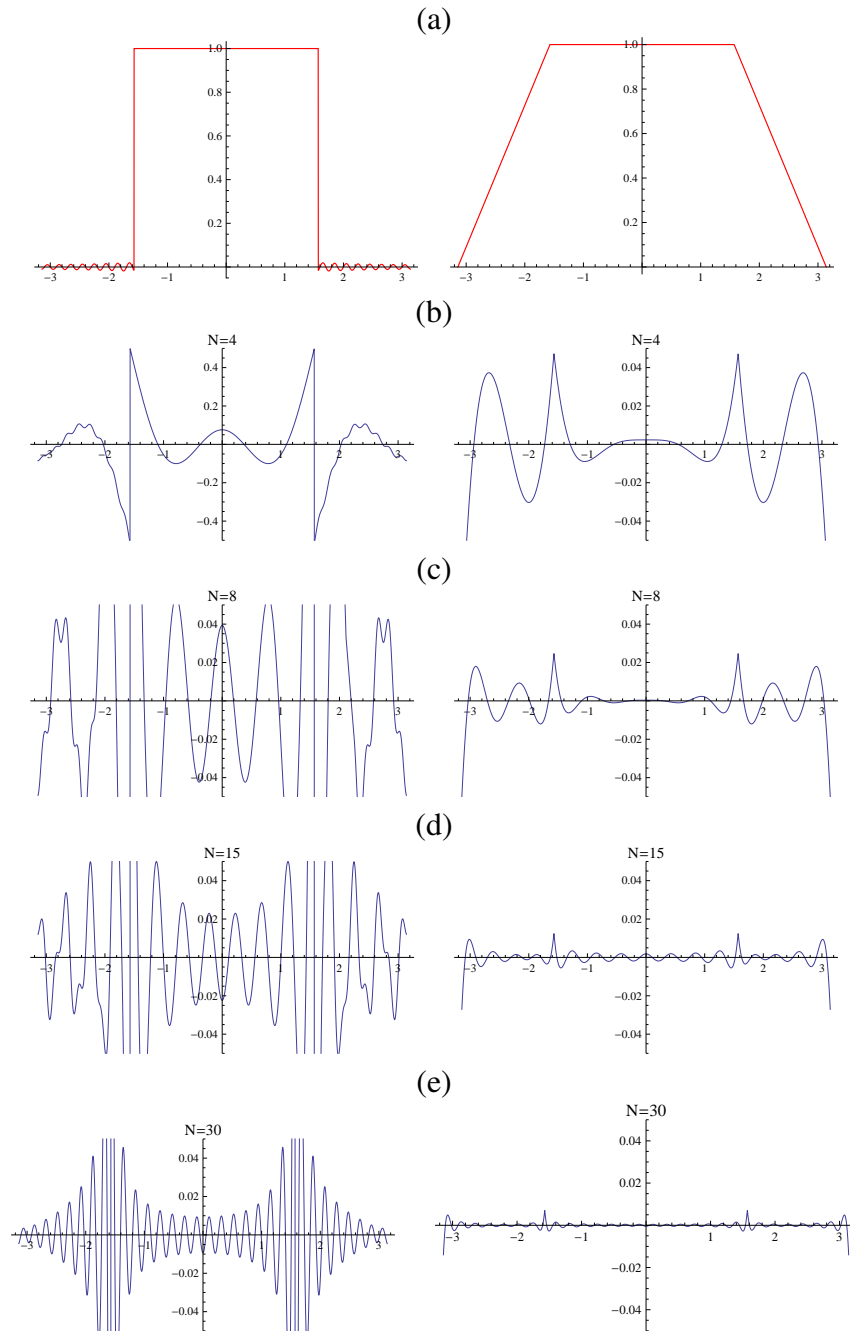


Figura 2.6: Errores de las aproximaciones de Fourier de la figura 2.5 (a) Salto con discontinuidades (izq.) y rampa (der.); (b)  $N = 4$ ; (c)  $N = 8$ ; (d)  $N = 15$ ; (e)  $N = 30$ .



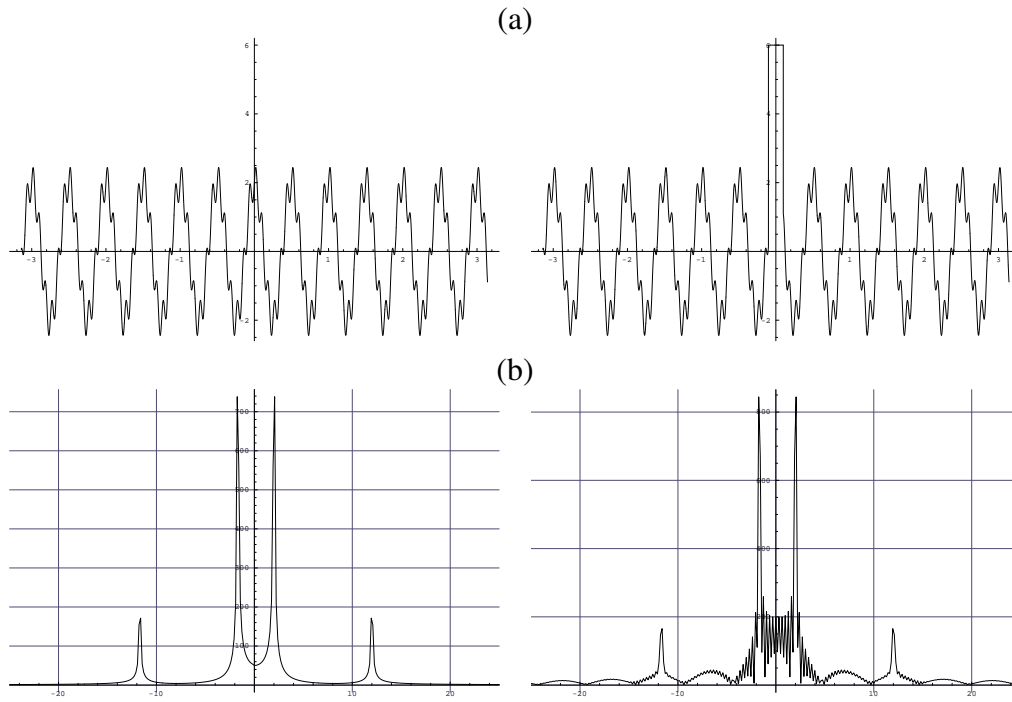


Figura 2.7: (a) Señal  $f(t) = 2 \cos(4\pi t) + 0.5 \text{ sen}(24\pi t)$  (izq) y señal modificada por un salto en  $[-\delta, \delta]$  (der.) (b) Espectros de potencia.

## 2.7. La transformada de Fourier continua

Supongamos que  $f$  es una función Lebesgue integrable sobre  $\mathbb{R}$ . Siempre que  $\exp(-i\omega t)$  es continua y acotada, entonces el producto  $\exp(-i\omega t)f(t)$  es localmente integrable para cualquier  $\omega \in \mathbb{R}$ . También se cumple que  $|\exp(-i\omega t)| \leq 1$  para toda  $\omega, t \in \mathbb{R}$ . Si consideramos la siguiente integral

$$(2.28) \quad \langle f, e^{-i\omega t} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

entonces

$$(2.29) \quad \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R} \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_1 < \infty.$$

Esto significa que la integral (2.28) existe para toda  $\omega \in \mathbb{R}$  y así obtenemos la siguiente definición.

*Definición 2.5.* [14] Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . La *transformada de Fourier continua* de la función  $f(t)$  denotada por  $\hat{f}(\omega)$  se define como

$$(2.30) \quad \hat{f}(\omega) = \{\mathcal{F}(f)\}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

La integral de Fourier (2.30) mide las oscilaciones de  $f$  en la frecuencia  $\omega$ , a  $\hat{f}(\omega)$  se le llama el *espectro de frecuencias* de una señal o *forma de onda*  $f(t)$ . Puede referirse igualmente a  $f(t)$  como la forma de onda en el dominio del tiempo y a  $\hat{f}(\omega)$  como la forma de onda en el dominio de frecuencia.

Las siguientes son propiedades básicas que se muestran a partir de la definición

**Proposición 2.6.** [14] Sea  $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ . Entonces

1. [Continuidad] La aplicación  $\omega \mapsto \hat{f}(\omega)$  es uniformemente continua.
2. [Contracción] La aplicación  $f \mapsto \hat{f}$  es una contracción entre los espacios  $L^1(\mathbb{R})$  y  $L^\infty(\mathbb{R})$ :

$$|\mathcal{F}(f)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

3. [Linealidad] El operador  $\mathcal{F}$  es lineal.

4. [Traslación y corrimiento] Si  $F$  es la transformada de Fourier de  $f$  entonces  $e^{-2\pi ia \cdot \omega} F(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $f(x - a)$  y  $F(\omega + b)$  es la transformada de Fourier de  $e^{-2\pi ib \cdot x} f(x)$ .
5. [Convolución] Si  $F_i$  es la transformada de Fourier de  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , entonces  $F_1 F_2$  es la transformada de Fourier de la convolución  $f_1 * f_2$ :

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(y) f_2(x - y) dy.$$

La demostración puede revisarse en [6].

Aunque la transformada de Fourier se ha definido originalmente para funciones en  $L^1(\mathbb{R}^n)$  se puede extender a funciones en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  usando densidad.

**Teorema 2.7** (Plancherel). [14] Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Si además  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  entonces su transformada de Fourier  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . En particular la transformada de Fourier en  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  puede extenderse a  $L^2(\mathbb{R}^n)$  como una isometría.

## 2.8. Principio de incertidumbre de Heissenberg

El principio de incertidumbre de Heissenberg tiene sus orígenes en la Mecánica cuántica y afirma en esencia que dos observables tales como la posición y el momento no pueden determinarse con absoluta precisión sino que hay un límite natural al producto de sus varianzas. La posición y momento son variables conjugadas en Mecánica cuántica, en el sentido de que una es la transformada de Fourier de la otra. En términos matemáticos, si  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  la dispersión de  $f$  alrededor de 0 se define como

$$D_0(f) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}.$$

**Teorema 2.8** (Principio de incertidumbre). [14] Sea  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , una función a valores complejos que es absolutamente continua, tal que  $x f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y  $f' \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Entonces se tiene la desigualdad

$$D_0(f) D_0(\hat{f}) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

El término “incertidumbre” proviene de la interpretación de que no se pueden localizar al mismo tiempo  $f(x)$  y  $f(\xi)$  en sus respectivos espacios. Si  $f(x)$  está localizada alrededor de

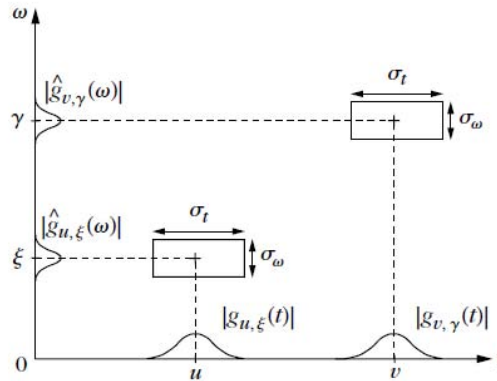


Figura 2.8: Principio de incertidumbre de Heisenberg.

$x = 0$ , entonces  $D_0(f)$  será pequeña por lo que la dispersión  $D_0(\hat{f})$  de su transformada será grande.

En la figura 2.8 se muestran funciones dependientes de  $t$  (y de parámetros indicados por subíndices) y su transformadas de Fourier dependientes de  $\omega$ . Las dispersiones alrededor de la media de la función  $g(t)$  y su transformada  $\hat{g}(\omega)$  definen dos rectángulos cuya área no puede hacerse arbitrariamente pequeña.

## 2.9. La transformada de Fourier de tiempo corto (STFT)

Una señal estacionaria se puede analizar mediante sus diversas frecuencias componentes de su espectro de potencia. Por ejemplo, la señal puramente senoidal  $f(t) = \text{sen}(2\pi\nu t)$  tendrá en su espectro de potencia, un pico bien definido en la frecuencia  $\nu$ .

La STFT busca la aparición de la frecuencia circular  $\omega$  en cierto tiempo  $t$ . La función que se analiza tiene la forma

$$g_{(\omega,t)} = e^{i\omega u} w(u - t),$$

donde  $w(u)$  es la *función ventana*, generalmente centrada en el origen y con un corrimiento en el tiempo  $t$ . En este caso, la señal transformada depende de  $\omega$  y de  $t$ . Como ésta siempre dependerá de la forma de la función ventana, se denotará por  $\hat{f}_\omega(\omega, t)$  y se define como [4]:

$$(2.31) \quad \hat{f}_\omega(\omega, t) = \int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{g_{(\omega,t)}(u)} du.$$

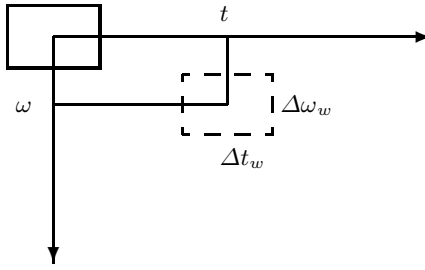


Figura 2.9: Celdas en el plano fase,  $w$  (línea continua) y  $g(\omega, t)$  (línea salteada).

En general, la función a analizar estará localizada en el tiempo respectivo  $t$ . Por lo tanto, la transformada no sólo informa sobre la aparición de una cierta frecuencia, sino también el tiempo en que aparece. Por otro lado, el tamaño de la ventana es constante, por lo tanto, si se quiere detalles diminutos de la señal (frecuencias altas) en sólo una vecindad pequeña, eventualmente la señal se partirá. Las ampliaciones en detalles más pequeños, análogamente a un microscopio, no se pueden realizar.

Supongamos que la función ventana tiene los siguientes parámetros de localización:

$$t_w = 0, \omega_w = 0, \Delta t_w, \Delta \omega_w,$$

entonces los parámetros de localización de  $g(\omega, t)$  son

$$t_{g(\omega, t)} = t, \omega_{g(\omega, t)} = \omega, \Delta t_{g(\omega, t)} = \Delta t_w, \Delta \omega_{g(\omega, t)} = \Delta \omega_w.$$

Las celdas correspondientes en el plano fase se ilustra en la figura 2.9.

Por lo tanto, la transición de  $w = g(0, 0) \rightarrow g(\omega, t)$  corresponde sólo a un corrimiento de la celda en el plano fase, mientras que el tamaño y la forma permanecen sin cambios.

Cuando la señal no es estacionaria, existe una técnica para analizarla llamada la transformada de Fourier de tiempo corto (STFT) que consiste en tomar segmentos de la señal (técnicamente se dice “ventanear” la señal) multiplicando por una función escalar entre 0 y 1 de soporte  $L$ , con máximo en  $L/2$  y realizar su análisis del espectro. Por traslaciones de la función ventana, se pueden seleccionar otros segmentos de la señal y calcular su espectro de potencia. En la figura 2.10 se muestra un ejemplo de este procedimiento usando la *ventana de Hamming*, cuyo perfil se muestra en la figura 2.10. En el STFT las ventanas en general se traslapan, con el fin de no perder información en los extremos de las ventanas. Los espectros de la señal ventaneada se muestran en la figura 2.12.

El análisis del espectro de la señal ventaneada con una ventana de soporte específico y offset de deslizamiento se puede resumir en un diagrama llamado *espectrograma*. En la

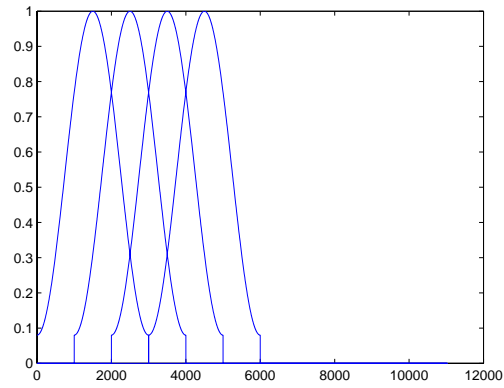


Figura 2.10: Ventanas de Hamming.

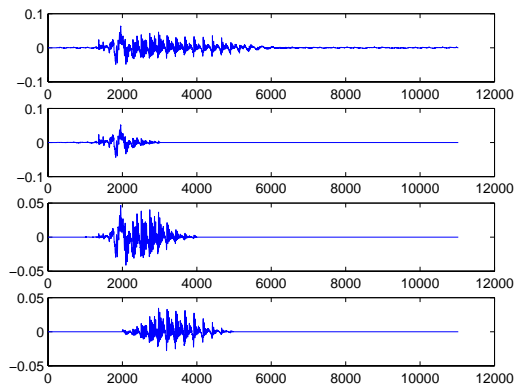


Figura 2.11: Ventaneo de la señal correspondiente al fonema “ta” con ventanas de Hamming.

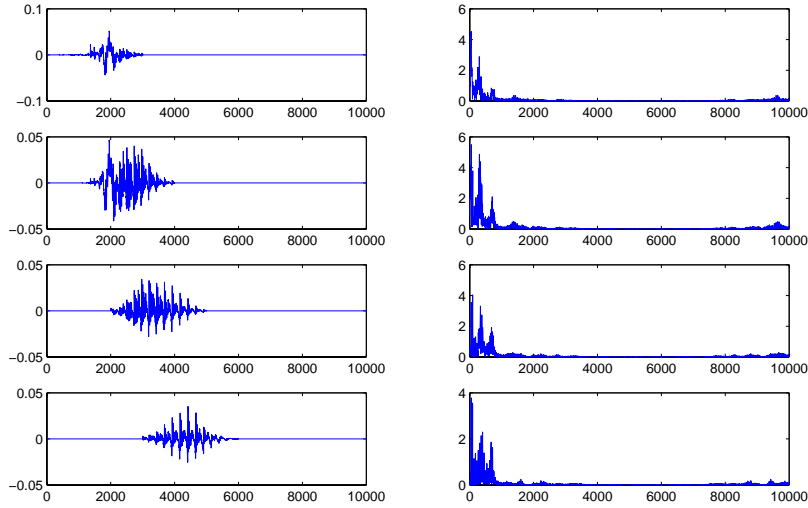


Figura 2.12: Análisis de Fourier de tiempo corto. A la izquierda aparece la señal ventaneada; a la derecha el espectro de potencia, en escala logarítmica.

figura 2.11 se muestran espectrogramas de la señal “ta” con ventanas de Hamming de distinto soporte.

## 2.10. La transformada de Fourier discreta en 2D

La transformada de Fourier se puede extender con éxito a dos dimensiones para el análisis de señales bidimensionales (imágenes).

Para ello consideremos una señal continua bidimensional  $f(x, y)$  la cual se muestrea obteniendo así la señal discreta bidimensional

$$(2.32) \quad f_d(x_i, y_j) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} f(n_1 T_1, n_2 T_2) \delta(x_i - n_1 T_1) \delta(y_j - n_2 T_2)$$

donde  $T_1, T_2$  son los intervalos de muestreo a lo largo del eje  $x$  y  $y$  respectivamente. La suma infinita sobre los índices enteros  $n_1, n_2$ , en realidad se reduce a muestrear la señal en el punto de coordenadas  $(n_1 T_1, n_2 T_2)$ . Ya que la transformada de Fourier de

$$\delta(x_i - n_1 T_1) \delta(y_j - n_2 T_2) \quad \text{es} \quad \exp[-i(n_1 T_1 \omega_1 + n_2 T_2 \omega_2)]$$

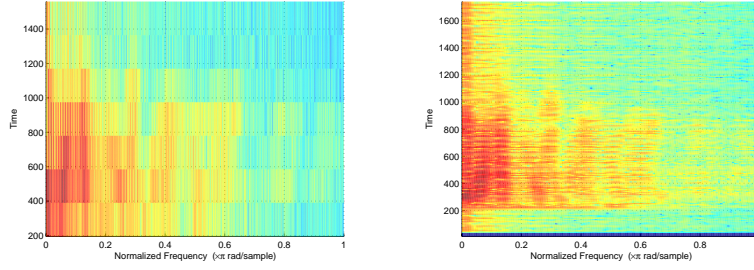


Figura 2.13: Espectrogramas de la señal “ta”, con distintos soportes de ventana (8 en el primer caso, 100 en el segundo).

entonces la transformada de Fourier de la señal muestreada es

$$(2.33) \quad \hat{f}_d(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} f(n_1 T_1, n_2 T_2) \exp[-i(n_1 T_1 \omega_1 + n_2 T_2 \omega_2)]$$

La demostración de la siguiente proposición es similar a su versión unidimensional (2.20).

**Proposición 2.9.** [11] *La transformada de Fourier de la imagen discreta, obtenida por muestreo de la imagen continua  $f(x, y)$  en intervalos de tamaño  $T_1$  y  $T_2$  a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$  es*

$$(2.34) \quad \hat{f}_d(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega_1 - \frac{2k_1\pi}{T_1}, \omega_2 - \frac{2k_2\pi}{T_2}\right).$$

Observe que  $\hat{f}$  es la transformada de Fourier de la señal continua  $f$ :

$$\hat{f}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(\omega_1 x + \omega_2 y)] dx dy.$$

El equivalente al teorema de muestreo de Shannon–Nyquist es el siguiente:

**Teorema 2.10.** [11] *Si  $\hat{f}$  tiene soporte contenido en  $[-\pi/T_1, \pi/T_1] \times [-\pi/T_2, \pi/T_2]$  entonces*

$$f(x, y) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} f(n_1 T_1, n_2 T_2) h_{T_1}(x - n_1 T_1) h_{T_2}(y - n_2 T_2),$$

donde  $h_T$  es la función sinc (??).



Si el soporte de  $\hat{f}$  no está contenido en el rectángulo  $[-\pi/T_1, \pi/T_1] \times [-\pi/T_2, \pi/T_2]$ , la fórmula de interpolación introduce el fenómeno de *aliasing*. En la figura 2.1 se muestra un efecto de aliasing llamado *efecto de Moiré*.

Si en (2.33) discretizamos la frecuencias tomando  $\omega_1 = 2\pi k_1/N_1$ ,  $\omega_2 = 2\pi k_2/N_2$ , donde  $N_1$  es el número de puntos de muestreo a lo largo del eje  $x$  y  $N_2$  los puntos de muestreo a lo largo del eje  $y$ , obtenemos la transformada discreta de Fourier bidimensional:

$$\hat{f}_d(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1, n_2=0}^{N_1-1, N_2-1} f(n_1, n_2) \exp[-i2\pi(n_1 k_1/N_1 + n_2 k_2/N_2)]$$

donde  $f(n_1, n_2)$  es la señal muestreada en los  $N_1 \times N_2$  puntos  $(n_1 T_1, n_2 T_2)$ ,  $n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ ,  $n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1$  y  $\hat{f}_d(k_1, k_2)$  es la transformada de Fourier discreta en las frecuencias  $(k_1 f_{s_1}/N_1, k_2 f_{s_2}/N_2)$ , siendo  $f_{s_1} = 1/T_1$ ,  $f_{s_2} = 1/T_2$  las frecuencias de muestreo a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente.

## 2.11. La transformada de Gabor

La transformada continua de Gabor es una localización de la transformada de Fourier por medio de la introducción la función ventana. La existencia de esta ventana esta en función de dos parámetros: un parámetro de tiempo para la ubicación del centro de la ventana y un parámetro de frecuencia para la transformada de Fourier de la señal ventana. La transformada de Gabor se basa en traslaciones de tiempo y frecuencia.

Dada una función  $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$  se construye la familia  $\{g_{b,\omega} : b, \omega \in \mathbb{R}\}$  de funciones de Gabor obtenidas mediante copias con corrimiento y modulación de  $g$

$$g_{(b,\omega)}(x) = e^{i\omega(x-b)} g(x-b).$$

Se usa la función  $g$  para concentrar el análisis cerca de puntos específicos en el dominio de tiempo y lo llamaremos función ventana del análisis. Siempre que  $g$  es fija, la transformada de Gabor continua asociada se define como

**Definición 2.11.** [4] Sea  $g \in L^2(\mathbb{R})$  una ventana. La *transformada de Gabor* continua de una señal de energía finita  $f \in L^2(\mathbb{R})$  esta definida por la transformada integral

$$(2.35) \quad G_f(b, \omega) = \langle f, g_{(b,\omega)} \rangle = \int f(x) \overline{g(x-b)} e^{-i\omega(x-b)} dx.$$

Si suponemos que la ventana real  $g(t)$  está bien localizada en un intervalo centrado en  $t = 0$ , de longitud  $\Delta_t$  y que su transformada  $\tilde{g}(\omega)$  está también localizada en una banda centrada en  $\omega = 0$ , de ancho  $\delta_\omega$ , entonces las ventanas desplazadas y moduladas  $g(t - \tau)e^{i\omega t}$  son funciones elementales bien localizadas en el dominio conjunto tiempo-frecuencia. Cada función elemental se localiza en el rectángulo centrado en el punto  $(\tau, \omega)$  de tamaño  $\Delta_t\Delta_\omega$ .

El conjunto de los coeficientes de  $G_f(b, \omega)$  suele llamarse la representación de Gabor de  $f$ . Esta representación es completa ya que la transformada de Gabor es invertible en su rango.

**Teorema 2.12.** [4] Sea  $g \in L^2(\mathbb{R})$  una ventana no trivial, es decir  $\|g\| \neq 0$ . Entonces cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  admite la descomposición

$$(2.36) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi\|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_f(b, \omega) g_{(b, \omega)}(x) db d\omega,$$

donde la igualdad se cumple en el sentido débil de  $L^2(\mathbb{R})$

La expresión anterior es equivalente al hecho de que la transformada de Gabor continua preserva la norma. A este resultado de le conoce como la *fórmula de Gabor-Plancherel* y se puede escribir como

$$(2.37) \quad \int_{\mathbb{R}^2} |G_f(b, \omega)|^2 db d\omega = 2\pi\|g\|^2\|f\|^2.$$

Esto se sigue del teorema de Fubini, suponiendo que  $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Así que la transformación

$$f \mapsto \frac{1}{\|g\|\sqrt{2\pi}} G_f,$$

conserva la norma. Esto nos da una noción de la conservación de la energía entre el dominio de tiempo y el dominio tiempo-frecuencia, así como la simetría de la transformada de Gabor continua. Utilizando la fórmula de Plancherel, podemos escribir

$$(2.38) \quad G_f(b, \omega) = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g}_{(b, \omega)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi - \omega)} e^{i\xi\omega} d\xi,$$

así podemos pensar que  $G_f(b, \omega)$  es la transformada de Gabor de la transformada de Fourier de  $f$ .

La implementación de la transformada de Gabor para el procesamiento de señales de emisiones acústicas resulta eficiente cuando se trata de localizar y caracterizar eventos con patrones de frecuencia bien definida, no superpuestos y relativamente largos, respecto de la ventana de análisis.

Por otro lado, es totalmente inapropiada para detectar detalles de corta duración, oscilaciones largas asociados a las bajas frecuencias, o caracterizar patrones autosimilares presentes en fenómenos a distintas escalas.

La transformada de Gabor es un caso especial de la STFT. Se puede usar para determinar la frecuencia y la fase de regiones locales de una señal que cambia con respecto al tiempo.

**Ejemplo 2.13.** Consideremos la señal

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi t) & \text{si } t < 0, \\ \cos(4\pi t) & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

la cual se muestra en la siguiente figura, así como su transformada de Gabor:

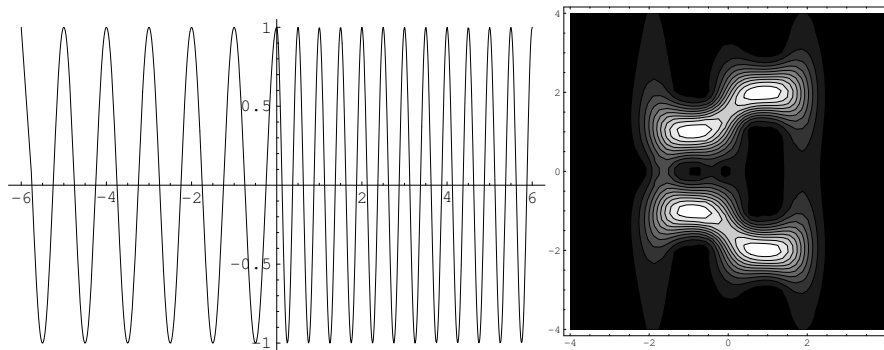


Figura 2.14: Gráfica de  $x(t)$  y su transformada de Gabor.

*Podemos observar incertidumbre en el plano tiempo-frecuencia cuando se produce una variación de frecuencia. Este se debe a que la resolución depende del tamaño de la ventana seleccionada para el análisis. A intervalos mayores se obtiene una buena resolución en frecuencia, en ventanas estrechas una localización temporal correcta.*



# Capítulo 3

## Filtros

Consideremos nuevamente la wavelet daub4 vista en el capítulo 1. En procesamiento de señales, los coeficientes de aproximación a una resolución  $m$ ,  $A^m$  son convolucionados con el filtro pasa-bajas, es decir, los coeficientes de escalamiento (1.19). Esto se hace moviendo el filtro a lo largo de la señal un paso a la vez. Los coeficientes de aproximación son submuestreados en donde cada valor obtenido se toma de tal forma que proporcione el vector de coeficientes de aproximación a una escala  $m + 1$ . Los coeficientes de aproximación a una resolución  $m$ ,  $D^m$ , también son convolucionados con el filtro pasa-altas y submuestreados de la misma forma para proporcionar los coeficientes de la señal de detalles a una escala  $m + 1$ . Las componentes de detalle  $D^{m+1}$  son conservadas y las componentes de aproximación  $A^{m+1}$  nuevamente pasan por los filtros pasa-bajas y pasa-altas para dar las componentes  $D^{m+2}$  y  $A^{m+2}$ . Este proceso se repite hasta tener la descomposición total de la señal. Las sucesiones  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  están contenidas en los vectores de los filtros pasa-bajas y pasa-altas respectivamente, los cuales se utilizan en el algoritmo de descomposición wavelet.

Un filtro es un objeto que no deja pasar algo, por ejemplo, el filtro de aire automotriz, evita que pase polvo y polen al carburador o al cuerpo de aceleración. En el contexto de señales, un filtro solo deja pasar ciertas frecuencias, según sea diseñado; por ejemplo, la transformada de Fourier (2.30) puede utilizarse para detectar ciertas frecuencias en una señal, la cual puede ser una imagen y eliminarlas.

Supongamos que tenemos un muestreo dado, a un periodo de muestreo constante  $T$  y que obtuvimos una señal digital  $x(n)$ . El propósito es aplicar algún tipo de operación de tratamiento de señales que sea lineal, de tal manera que a partir de la señal  $x(n)$  obtengamos una señal digital de salida  $y(n)$  (ver figura 3).

A este modelo de tratamiento lo llamaremos *lineal*, si la función de respuesta de impulso  $f(x)$  que define una relación entre las señales de entrada y salida, satisface el *principio de*

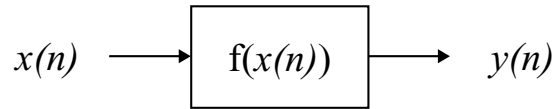


Figura 3.1: Función de transferencia.

*superposición*, tal que

$$(3.1) \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(kx) = kx$$

### 3.1. Señales LTI

Si los parámetros de la función de transferencia son constantes en el tiempo, se dice que la operación de tratamiento es *invariante en el tiempo*. A veces a estas operaciones se les llama *sistema lineal e invariante en el tiempo* (LTI por sus siglas en inglés) [17]. Un sistema es *causal*, si la señal de salida presente sólo depende de las señales de entrada presente y pasada, pero no depende de las entradas futuras, es decir

$$y(n) = f[x(n), x(n-2), x(n-2), \dots].$$

Si un sistema no satisface esta definición, se dice que es *no causal*.

Existen dos clases de sistemas LTI:

1. los que tienen una respuesta al impulso de duración finita (FIR, *finite-duration impulse response*) y
2. los que tienen una respuesta al impulso de duración infinita (IIR, *infinite-duration impulse response*)

La operación de un procesador de tiempo discreto se puede modelar de varias formas, por ejemplo, un modelo espacio-estado, un modelo de convolución o mediante la transformada  $z$ .

La ecuación en diferencias o relación recurrente puede modelar la retroalimentación en un sistema, es decir, la salida se convierte en la entrada en un tiempo futuro. La ecuación

$$(3.2) \quad y(n) - 0.8y(n-1) + 0.2y(n-2) = 0.1x(n-1)$$

representa una ecuación en diferencias de orden 2; en este caso, necesitamos conocer las condiciones iniciales  $y(-1)$  y  $y(-2)$  para obtener la primera salida  $y(0)$ . La forma general de una ecuación en diferencias esta dada por:

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j).$$

El orden de la ecuación es  $N$ , el cual también es el número de condiciones iniciales.

El modelo estado-espacio representa un sistema físico mediante un conjunto de entrada, un conjunto de salida y variables de estado relacionadas a un sistema de ecuaciones diferenciales o a un sistema de ecuaciones en diferencias. Por ejemplo, podemos representar el sistema (3.2) introduciendo las variables

$$(3.3) \quad \begin{matrix} y_1(n) = y(n) & x_1(n) = x(n) \\ y_2(n) = y(n+1) & x_2(n) = x(n+1) \end{matrix}$$

entonces

$$(3.4) \quad \begin{pmatrix} y_1(n-1) \\ y_2(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(n-2) \\ y_2(n-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n-2) \\ x_2(n-2) \end{pmatrix}$$

el cual es de la forma

$$\mathbf{Y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(n) + \mathbf{B}\mathbf{X}(n)$$

donde  $\mathbf{A}$  es la matriz de transición y  $\mathbf{B}$  la matriz de entrada.

La convolución es una operación entre dos funciones  $f$  y  $g$ , la cual produce una función que generalmente se ve como una versión modificada de una de las funciones originales. El *modelo de convolución* es una suma de convoluciones de las señales de entrada y salida

$$(3.5) \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k).$$

Si la señal de entrada  $x(n)$  es un pulso unitario  $\delta(n)$ , entonces

$$(3.6) \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\delta(n-k) = h(n).$$

Por lo tanto,  $h(n)$  es la función de respuesta de impulso. Consideremos ahora un senoide muestreado de frecuencia  $\omega$

$$(3.7) \quad x(n) = e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n) \quad n \in \mathbb{R}$$

sustituyendo la ecuación (3.7) en la expresión (3.5) tenemos que

$$(3.8) \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{i\omega(n-k)} = x(n)H(e^{j\omega})$$

así que la salida es igual que la entrada salvo por el factor  $H(e^{j\omega})$ , donde

$$(3.9) \quad H(e^{j\omega}) = \frac{y(n)}{x(n)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}.$$

A este factor de ganancia se le conoce como *respuesta de frecuencia* del sistema. La respuesta de frecuencia  $H(e^{j\omega})$  es simplemente la DFT de la respuesta del impulso  $h(n)$ .

Otra manera de representar un sistema de procesamiento de señales es mediante la *transformada z*. Supongamos que tenemos un sistema causal con retraso

$$h(n) = 0 \text{ y } x(n) = 0 \text{ para } n < 0$$

así que la señal es cero para muestras correspondientes a tiempos “negativos”; la ecuación (3.5) se reduce a

$$(3.10) \quad y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k).$$

La transformada  $z$  consiste en multiplicar por  $z^{-n}$  y sumar de ambos lados de la ecuación (3.10)

$$(3.11) \quad \sum_{k=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)z^{-(n-k)}$$

con

$$(3.12) \quad Y(z) = H(z)X(z),$$

entonces

$$(3.13) \quad H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

es la transformada  $z$  de la respuesta del impulso.



Por lo tanto, el sistema causal se puede caracterizar completamente por la función de transferencia  $H(z)$ , que en el caso general es una serie de Laurent.

Retomando el ejemplo (3.2), supongamos que el sistema es causal y que existen las transformadas respectivas  $X(z)$  y  $Y(z)$  de  $x(n)$  y de  $y(n)$ , entonces la ecuación (3.2) transformada se ve como:

$$(3.14) \quad Y(z) - 0.8Y(z)z^{-1} + 0.2Y(z)z^{-2} = 0.1X(z)z^{-1}$$

y la transformada  $z$  de la respuesta de impulso es

$$(3.15) \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.1z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.2z^{-2}}.$$

El único cero de  $H(z)$  esta en  $z_1 = 0$ , mientras que los polos están en  $z_1 = 0.4 + 0.2i$  y  $z_2 = 0.4 - 0.2i$ . Para que el sistema (3.2) sea estable, necesitamos que los polos estén dentro del círculo unitario en el plano complejo, es decir

$$|z_p| < 1 \quad \forall p$$

por lo tanto, el sistema 3.2 se estable cuando:

$$|z_1| = |z_2| \approx 0.45.$$

## 3.2. Filtro ideal

Un sistema LTI discrimina o “filtra” las distintas componentes de frecuencia en la señal de entrada. De hecho, cualquier sistema LTI puede verse como un filtro de conformación de frecuencias. Por lo tanto, un sistema LTI y un filtro son sinónimos.

Un *filtro ideal* es aquel que deja pasar un cierto rango de frecuencias específicas, mientras que atenúa un rango específico de frecuencias no deseadas [15]. Podemos clasificar estos filtros ideales con respecto al rango de frecuencias que dejan pasar o que bloquean:

- filtro pasa-bajas: deja pasar frecuencias bajas y atenúa frecuencias altas
- filtro pasa-altas: deja pasar frecuencias altas y atenúa frecuencias bajas
- filtro pasa-banda: deja pasar una cierta banda de frecuencias
- filtro para-banda: atenúa cierta banda de frecuencias

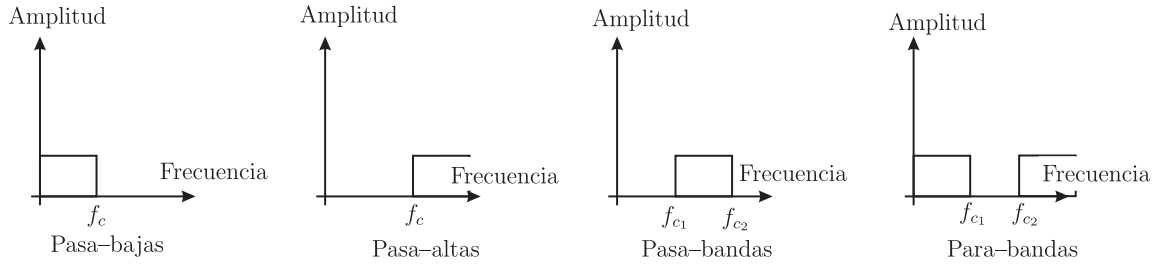


Figura 3.2: Esquema de la clasificación de filtros ideales.

Observemos en la figura 3.2 que los puntos de las frecuencias  $f_c$ ,  $f_{c_1}$  y  $f_{c_2}$  especifican las frecuencias de corte de cada filtro.

Un filtro pasa-bajas ideal puede verse como la multiplicación de una señal por una función rectangular en el dominio de frecuencias, ó mediante una convolución con una función respuesta de impulso sinc en el dominio del tiempo.

Cabe señalar que un filtro ideal es imposible de realizar, debido a que no se tienen señales de extensión infinita en el tiempo de tipo ventana, es decir, los valores  $|h(t)| \geq M$  están localizados en un intervalo  $|t| < \delta$ . Por ejemplo, la función sinc:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

y la función sinc normalizada

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}.$$

La transformada de Fourier de la función sinc normalizada es la función rectangular sin escalamiento.

### 3.3. Decimación

La decimación es un método que consiste en reducir el número de muestras, o bien la tasa de muestreo  $f_S$  en un sistema de procesamiento de señales. Al elemento que implementa esta técnica se le llama *decimador*. La decimación también es conocida como *downsampling* o *submuestreo* [15].

Supongamos que la señal  $x(n)$  con espectro  $X(\omega)$  se submuestra por un factor  $D$  y que  $X(\omega)$  es distinto de cero cuando  $0 \leq |\omega| \leq \pi$ , es decir,  $|F| \leq F_x/2$ . Para evitar el aliasing, reducimos el ancho de banda de  $x(n)$  a  $F_{max} = F_x/2D$ , o sea que  $\omega_{max} = \pi/D$  (ver figura 3.3).

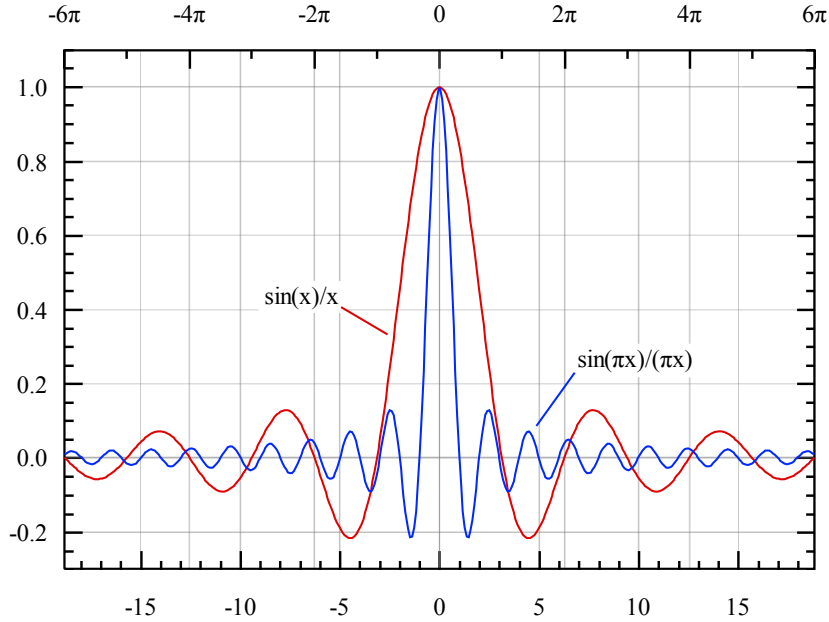


Figura 3.3: Funciones sinc y sinc normalizada.

La señal de entrada  $X(n)$  pasa por un filtro pasa-bajas, que tiene respuesta de impulso  $h(n)$  y respuesta de frecuencia  $H_d(\omega)$ , además satisface la condición ideal

$$(3.16) \quad H_D(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/D \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La salida de este filtro esta dada por

$$(3.17) \quad v(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

al submuestrearla por el factor  $D$ , genera la señal

$$(3.18) \quad y(m) = v(mD) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(mD-k)$$

La operación de filtrado de  $x(n)$  es LTI, pero dado que  $x(n-n_0)$  no implica que  $y(n-n_0)$ , excepto que  $n_0$  sea múltiplo de  $D$ , entonces la operación global de filtrado no es LTI.

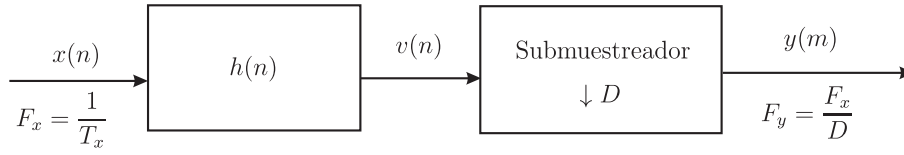


Figura 3.4: Decimación por un factor  $D$ .

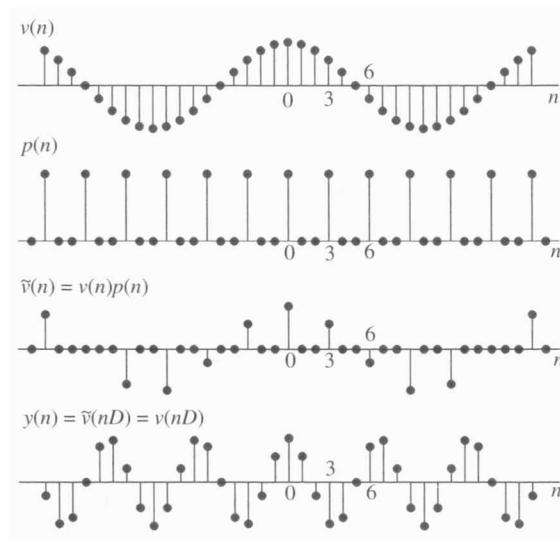


Figura 3.5: Pasos del proceso de decimación.

Definamos ahora una nueva señal  $\tilde{v}(n)$  como

$$(3.19) \quad \tilde{v}(n) = \begin{cases} v(n) & n = 0, \pm D, \pm 2D, \dots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\tilde{v}(n)$  es entonces una señal que se obtiene multiplicando a  $v(n)$  por un tren de impulsos periódico  $p(n)$ , con periodo  $D$ , donde  $p(n)$  se puede representar mediante su serie de Fourier como

$$(3.20) \quad p(n) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} e^{j2\pi kn/D}$$

entonces

$$(3.21) \quad \tilde{v}(n) = v(n)p(n) \text{ y } y(m) = v(mD).$$

La transformada  $z$  de la salida de  $y(m)$  es

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{v}(n) z^{-m/D}$$

ya que  $\tilde{v}(n) = 0$ , excepto en múltiplos de  $D$ . Sustituyendo (3.21) en la expresión anterior y sabiendo que  $V(z) = H_D(z)X(z)$ , se sigue que

$$Y(z) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} H_D(e^{-j2\pi k/Dz^{1/D}}) X(e^{-j2\pi k/Dz^{1/D}}).$$

Como la frecuencia de  $Y(m)$  es  $F_y = 1/T_y$  entonces

$$\omega_Y = 2\pi F T_y$$

por otro lado

$$F_y = \frac{F_x}{D}$$

así

$$\omega_X = 2\pi F T_x$$

Por lo tanto, mediante un filtro  $H_D(\omega)$ , el *aliasing* se elimina y así

$$Y(\omega_y) = \frac{1}{D} H_D\left(\frac{\omega_y}{D}\right) X\left(\frac{\omega_y}{D}\right) = \frac{1}{D} X\left(\frac{\omega_y}{D}\right).$$

Para ejemplificar consideremos la señal  $\sin(2\pi 30t) + \cos(2\pi 60t)$  con 4000 muestras, con un factor de decimación  $D = 4$ . Ver figura 3.6.

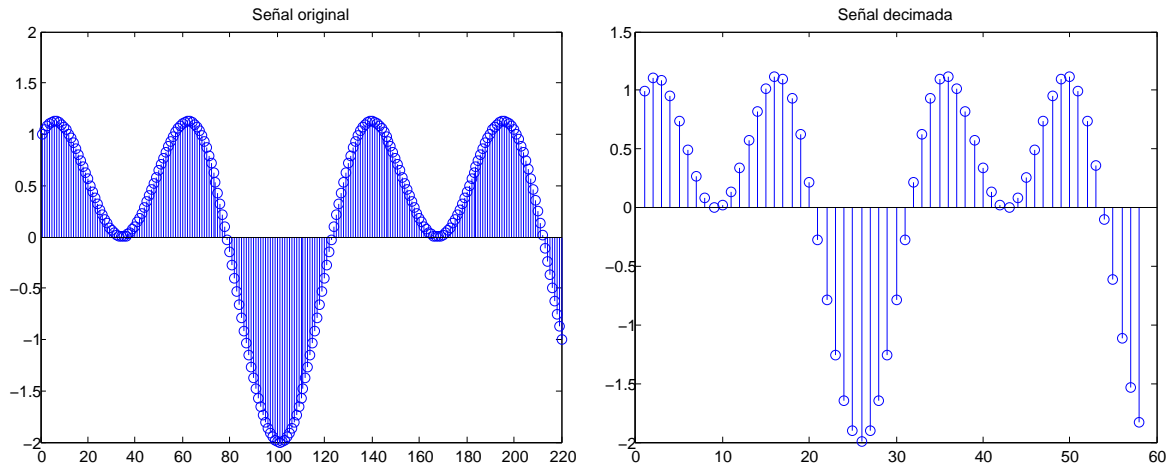


Figura 3.6: Decimación de una señal.

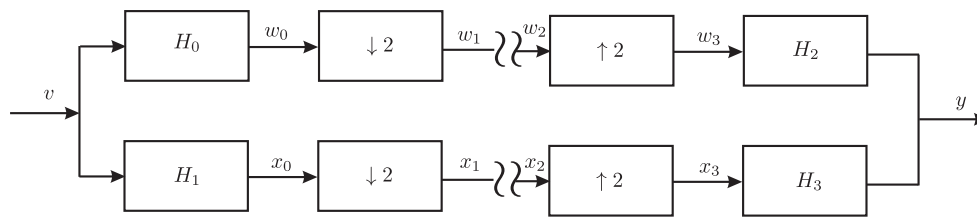


Figura 3.7: Banco de filtros de dos canales.

### 3.4. Filtro espejo en cuadratura

Un *banco de filtros* consiste en un conjunto de dos filtros digitales multitasa, generalmente conectados en paralelo, que utiliza dos decimadores en la parte del análisis de señales y dos interpoladores en la parte de síntesis de señales [15]. Al proceso de descomposición realizado por el banco de filtros se le llama *análisis*, el cual consiste en analizar la señal en términos de sus componentes en cada subbanda y a la salida del análisis se le conoce como *señal de subbanda*, la cual tiene tantas subbandas como filtros tenga el banco de filtros. Al proceso de reconstrucción se le llama *síntesis*, que consiste en reconstruir la señal completa resultante del proceso de filtrado. A este tipo de banco de filtros se le llama *filtro espejo en cuadratura* de dos canales, QMF por sus siglas en inglés *quadrature mirror filters* (ver figura 3.7).

Los filtros pasa-bajas y pasa-altas en la sección de análisis presentan las respuestas al impulso  $H_0$  y  $H_1$  respectivamente. Análogamente, los filtros pasa-bajas y pasa-altas en la

sección de síntesis presentan las respuestas al impulso  $H_2$  y  $H_3$ , respectivamente.

Las transformadas de Fourier de las señales en las salidas de los dos decimadores son

$$(3.22) \quad \hat{\omega}_1(\omega) = \frac{1}{2} \left[ X\left(\frac{\omega}{2}\right) H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) + X\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) H_0\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) \right]$$

$$(3.23) \quad \hat{x}_1(\omega) = \frac{1}{2} \left[ X\left(\frac{\omega}{2}\right) H_1\left(\frac{\omega}{2}\right) + X\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) H_1\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) \right]$$

Si  $\omega_2(\omega)$  y  $x_2(\omega)$  representan las dos entradas a la sección de síntesis, entonces la salida es:

$$(3.24) \quad \hat{X}(\omega) = \omega_2(\omega) H_2(\omega) + x_2(\omega) H_3(\omega).$$

Si se conecta el filtro de análisis al filtro de síntesis, de modo que  $\omega_1 = \omega_2$  y  $x_1 = x_2$ , obtenemos

$$(3.25) \quad \hat{X}(\omega) = \frac{1}{2} \left[ H_0(\omega) H_2(\omega) + H_1(\omega) H_3(\omega) \right] X(\omega) \\ + \frac{1}{2} \left[ H_0(\omega - \pi) H_2(\omega) + H_1(\omega - \pi) H_3(\omega) \right] X(\omega - \pi).$$

El primer término en la expresión 3.25 corresponde a la salida del banco de filtros QMF, mientras que el segundo término corresponde al efecto de *aliasing*. Si aplicamos la transformada  $z$  a la ecuación 3.25 tenemos

$$(3.26) \quad \hat{X}(z) = \frac{1}{2} \left[ H_0(z) H_2(z) + H_1(z) H_3(z) \right] X(z) \\ + \frac{1}{2} \left[ H_0(-z) H_2(z) + H_1(-z) H_2(z) \right] X(-z) \\ = Q(z) X(z) + A(z) X(-z)$$

donde

$$(3.27) \quad Q(z) = \frac{1}{2} \left[ H_0(z) H_2(z) + H_1(z) H_3(z) \right]$$

$$(3.28) \quad A(z) = \frac{1}{2} \left[ H_0(-z) H_2(z) + H_1(-z) H_3(z) \right]$$

Para eliminar el *aliasing*, es necesario que

$$(3.29) \quad H_0(z) H_2(z) + H_1(z) H_3(z) = 0,$$

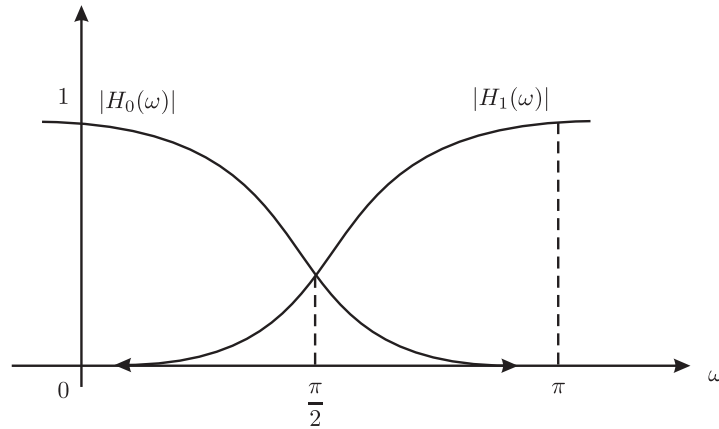


Figura 3.8: Características de los filtros  $H_0(\omega)$  y  $H_1(\omega)$ .

que en el dominio de frecuencia se convierte en

$$(3.30) \quad H_0(\omega - \pi)H_2(\omega) + H_1(\omega - \pi)H_2(\omega) = 0,$$

para satisfacer la condición 3.30 tomamos  $H_2(\omega)$  y  $H_3(\omega)$  como

$$(3.31) \quad H_2(\omega) = H_1(\omega - \pi), \quad H_3(\omega) = -H_0(\omega - \pi),$$

quedando así eliminado el segundo término de la ecuación (3.25).

Supongamos que podemos expresar a  $H_0(\omega)$  y  $H_1(\omega)$  como

$$(3.32) \quad H_0(\omega) = H(\omega),$$

$$(3.33) \quad H_1(\omega) = H(\omega - \pi),$$

donde  $H(\omega)$  es la respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bajas (ver figura 3.8). En el dominio del tiempo, las relaciones correspondientes son

$$(3.34) \quad h_0(n) = h(n),$$

$$(3.35) \quad h_1(n) = (-1)^n h(n).$$

consecuentemente,  $H_0(\omega)$  y  $H_1(\omega)$  presentan simetría respecto a la frecuencia  $\omega = \pi/2$ . Para mantener la restricción (3.31), seleccionamos el filtro pasa-bajas  $H_2(\omega)$  como

$$(3.36) \quad H_2(\omega) = H(\omega)$$



y el filtro pasa-altas como

$$(3.37) \quad H_3(\omega) = -H(\omega - \pi).$$

En el dominio del tiempo, estas relaciones se convierten en

$$(3.38) \quad h_2(n) = h(n),$$

$$(3.39) \quad h_3(n) = (-1)^n h(n).$$

En el dominio de la transformada  $z$ , las relaciones para eliminar el *aliasing* son

$$(3.40) \quad H_0(z) = H(z)$$

$$(3.41) \quad H_1(z) = H(-z)$$

$$(3.42) \quad H_2(z) = H(z)$$

$$(3.43) \quad H_3(z) = -H(-z)$$

Supongamos que  $A(z) = 0$ , de tal manera que la salida  $X(n)$  del banco de filtros QMF es idéntica a la entrada  $X(n)$ , excepto por algún retardo arbitrario. Si ésta condición se cumple, se dice que el banco de filtro QMF es de *reconstrucción perfecta*. También se necesita que:

$$(3.44) \quad Q(z) = \frac{1}{2} \left[ H_0(z)H_2(z) + H_1(z)H_3(z) \right] = z^{-k}.$$

Utilizando las ecuaciones 3.40, la condición de reconstrucción perfecta se escribe como

$$(3.45) \quad H^2(z) - H^2(-z) = 2z^{-k},$$

o equivalentemente

$$(3.46) \quad H^2(\omega) - H^2(\omega - \pi) = 2e^{-i\omega k}.$$

Por lo tanto, para conseguir la reconstrucción perfecta, la respuesta en frecuencia  $H(\omega)$  del filtro pasa-bajas del banco de filtros QMF de dos canales tiene que cumplir la condición

$$(3.47) \quad |H^2(\omega) - H^2(\omega - \pi)| = 2C,$$

donde  $C > 0$ .

El término “cuadratura” se debe a que las respuestas en frecuencias de los filtros pasa-baja y pasa-alta son simétricos alrededor del punto de “cuadratura”  $\frac{\pi}{2}$  [15]. Consideremos el espectro la respuesta de filtro, para señales reales, las frecuencias van de 0 a  $\pi$ . Si dividimos esto en dos secciones pasa-bajas y pasa-altas ideales, luego los dividimos a la mitad otra vez, es decir, en el punto  $\frac{\pi}{2}$ . El término “espejo” se debe a que las magnitudes de frecuencia de los filtros pasa-baja son una el reflejo de las magnitudes de frecuencia de los filtros pasa-alta.



# Capítulo 4

## Wavelets continuas y discretas

### 4.1. La transformada wavelet continua

Antes de que podamos construir la transformada wavelet debemos definir que es una wavelet.

*Definición 4.1.* [13] Una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  es una wavelet si tiene promedio cero, es decir

$$\int_{\mathbb{R}} \psi = 0.$$

La transformada wavelet continua es similar a la transformada de Fourier de tiempo corto excepto que reemplazamos  $g(t - b)e^{i\xi x}$  por  $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ , en donde  $b$  es el factor de traslación y  $a$  es el factor de dilatación de la *wavelet madre*  $\psi(x)$ ; a esta transformación se le conoce como transformada wavelet continua. La wavelet madre permite analizar la señal en ventanas de tamaño arbitrario, lo cual se realiza con el factor de escalamiento  $a$  y el análisis a lo largo del eje temporal se realiza con el factor de traslación  $b$ .

La *transformada wavelet* de una señal continua  $x(t)$  con respecto a la función wavelet  $\psi$  se define como

$$(4.1) \quad Tx(a, b) = w(a) \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

donde  $w(a)$  es una función de peso y  $\overline{\psi}$  corresponde al complejo conjugado. Cabe señalar que una función wavelet puede ser real o compleja. Generalmente  $w(a)$  se toma como  $\frac{1}{\sqrt{a}}$

para tener conservación de la energía. Por lo tanto la transformada wavelet se escribe como

$$(4.2) \quad Tx(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt.$$

En esta ecuación, el producto de la wavelet y la señal se integran sobre el rango de la señal, que formalmente hablando es una convolución. La función wavelet normalizada se escribe de manera compacta como

$$(4.3) \quad \psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

donde la normalización es con respecto a la energía de la wavelet. Podemos expresar de manera compacta la transformada wavelet como un producto interno:

$$(4.4) \quad Tx(a, b) = \langle x, \psi_{a,b} \rangle$$

La wavelet debe tener soporte localizado alrededor del origen. Intuitivamente debemos pedir que

$$(4.5) \quad \int t\psi(t) dt < \infty,$$

esto asegura que la wavelet está realmente concentrada alrededor del intervalo  $[-L, L]$  donde  $L$  es la varianza.

Ahora necesitamos introducir la siguiente condición, la cual a su vez, restringe demasiado la selección de una wavelet debido a que no cualquier wavelet es invertible:

*Definición 4.2.* [18] Una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  se le llama *wavelet admisible* o *wavelet básica*, si satisface la condición de admisibilidad  $C_\psi$ :

$$(4.6) \quad C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty.$$

La transformada wavelet continua con núcleo  $\psi$  se define por:

$$(4.7) \quad (W_\psi f)(a, b) := |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  es el parámetro de dilatación y  $b$  es el parámetro de traslación.

En general, si una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  satisface la condición de admisibilidad (4.6) también cumple con la condición (4.5). Por el teorema de Riemann-Lebesgue se cumple que  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{\psi}(\omega) = 0$  y si su transformada de Fourier  $\hat{\psi}$  es continua, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = \hat{\psi}(0) = 0$$

por lo que recuperamos la condición de promedio cero.

A continuación enunciaremos un lema que nos dice cómo construir una familia de wavelets:

**Lema 4.3.** *Sea  $\phi$  distinta de cero, una función  $k$ -veces diferenciable con ( $k \geq 1$ ) tal que  $\phi^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$ . Entonces*

$$(4.8) \quad \psi(x) = \phi^{(k)}(x)$$

es una wavelet.

*Demostración.* Por propiedades de la transformada de Fourier,  $|\hat{\psi}(\omega)| = |\omega|^k |\hat{\phi}(\omega)|$ . Luego

$$\begin{aligned} C_\psi &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\omega|^{2k} |\hat{\phi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &= \int_{-1}^1 |\omega|^{2k-1} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega + \int_{|\omega|>1} \frac{|\omega|^{2k} |\hat{\phi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &\leq 2\pi (\|\phi\|_{L^2}^2 + \|\phi^{(k)}\|_{L^2}^2) < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\psi$  cumple la condición de admisibilidad. □

Como ejemplo de esta construcción tenemos la wavelet de *sobrero mexicano*

$$(4.9) \quad \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{t}{2\sigma^2}}$$

que es el negativo de la segunda derivada normalizada de la Gaussiana y se ilustra en la figura 4.1.

**Lema 4.4.** *Sea  $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  una función diferente de cero tal que  $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$  y  $\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta \psi(x) dx < \infty$  para  $\beta > \frac{1}{2}$ . Entonces  $\psi$  es una wavelet.*

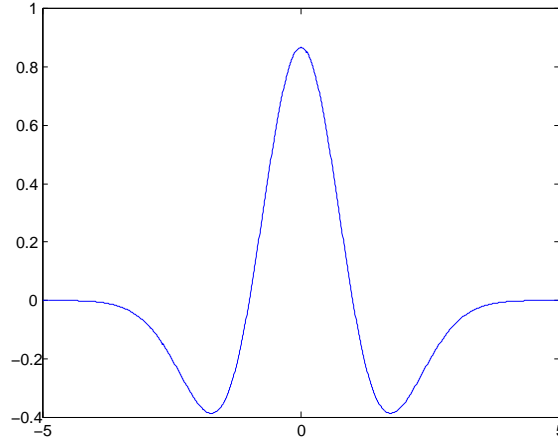


Figura 4.1: Wavelet de sombrero mexicano

*Demostración.* Supongamos que  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ . Entonces  $1 + |x|^\beta \geq (1 + |x|)^\beta$  y  $\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^\beta |\psi(x)| dx < \infty$ .

Sabemos que  $\phi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$  es diferenciable en casi cualquier punto y  $\phi'(x) = \psi(x)$ . Para  $x \leq 0$ , tenemos que

$$|\phi(x)| \leq \int_{-\infty}^x (1 + |t|)^{-\beta} (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt,$$

$$|\phi(x)| \leq \frac{1}{(1 + |x|)^\beta} \int_{-\infty}^x (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt,$$

Si  $x > 0$ , el valor medio cero de  $\psi$  implica que  $\phi(x) = -\int_x^{\infty} \psi(t) dt$ . Esto muestra que la desigualdad anterior se cumple para toda  $x \in \mathbb{R}$ , y por lo tanto  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ . Siempre que  $\phi' = \psi \in L^2(\mathbb{R})$ , por el lema anterior,  $\psi$  es una wavelet.  $\square$

Debido a que la función  $\psi$  satisface el teorema de Riemann-Lebesgue, entonces  $\psi$  es un filtro pasa-bandas, por lo que puede utilizarse para describir las características de las componentes localizadas de una señal  $f(t)$ .

La función  $\psi$  puede verse como una función ventana, cuyo centro está dado por

$$(4.10) \quad x_\psi^* := \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{\mathbb{R}} t |\psi(t)|^2 dt,$$

y el radio de la ventana es

$$(4.11) \quad \Delta_\psi := \frac{1}{\|\psi\|^2} \left[ \int_{\mathbb{R}} (t - x^*)^2 |\psi(t)|^2 dt \right]^{1/2},$$

en donde  $\|\psi\|^2$  es la norma de  $\psi$ :

$$\|\psi\|^2 = \left( \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

La ventana de  $\psi$ , también llamada ventana de tiempo de  $\psi$  es

$$[x_\psi^* - \Delta_\psi, x_\psi^* + \Delta_\psi],$$

la ventana de  $\hat{\psi}$ , también llamada ventana de frecuencia de  $\psi$  es

$$[x_{\hat{\psi}}^* - \Delta_{\hat{\psi}}, x_{\hat{\psi}}^* + \Delta_{\hat{\psi}}]$$

y al rectángulo

$$[x_\psi^* - \Delta_\psi, x_\psi^* + \Delta_\psi] \times [x_{\hat{\psi}}^* - \Delta_{\hat{\psi}}, x_{\hat{\psi}}^* + \Delta_{\hat{\psi}}]$$

se le conoce como ventana tiempo-frecuencia de  $\psi$ .

Ajustando  $a$  se pueden observar  $f$  y  $\hat{f}$  con diferente localización. A este fenómeno, se le llama la “propiedad de enfoque” de la wavelet.

Tomando  $a \neq 0$  y  $b$  reales, podemos generar un conjunto de wavelets generadas por la wavelet básica  $\psi$ , de la siguiente manera:

$$(4.12) \quad \psi_{a,b}(t) := |a|^{-1/2} \psi \left( \frac{t - b}{a} \right).$$

La ventana tiempo-frecuencia de  $\psi_{a,b}$  es

$$(4.13) \quad [b + ax_\psi^* - |a|\Delta_\psi, b + ax_\psi^* + |a|\Delta_\psi] \times \left[ \frac{x_{\hat{\psi}}^*}{a} - \frac{1}{|a|}\Delta_{\hat{\psi}}, \frac{x_{\hat{\psi}}^*}{a} + \frac{1}{|a|}\Delta_{\hat{\psi}} \right].$$

De la ecuación anterior, puede verse que cuando  $|a|$  se hace pequeña, la ventana de tiempo de  $\psi$  se hace angosta y la ventana de frecuencia se contrae.

También puede observarse que, para una wavelet básica, es imposible lograr una localización perfecta tanto en la ventana de tiempo como en la ventana de frecuencia simultáneamente. A este fenómeno, se le conoce como el principio de incertidumbre de Heisenberg.

**Teorema 4.5.** Sea  $\psi \in L^2$  que satisface  $x\psi(x)$  y  $\xi\hat{\psi}(\xi) \in L^2$ . Entonces

$$\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}} \geq \frac{1}{2}.$$

Ademas, la igualdad anterior se cumple sí y solo si

$$\psi(x) = ce^{iax}g_\alpha(x-b),$$

donde  $c \neq 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $g_\alpha$  es la función Gaussiana definida como

$$(4.14) \quad g_\alpha(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}.$$

*Demostración.* Supongamos que el centro de las ventanas de  $\psi$  y  $\hat{\psi}$  es 0 sin pérdida de generalidad. Entonces

$$\begin{aligned} (\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}})^2 &= \frac{(\int_{\mathbb{R}} t^2 |\psi(t)| dt)(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi)}{\|\psi\|_2^2 \|\hat{\psi}\|_2^2} \\ &= \frac{(\int_{\mathbb{R}} t^2 |\psi(t)| dt)(\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}'(\xi)|^2 d\xi)}{\|\psi\|_2^2 \|\hat{\psi}\|_2^2} \\ &= \frac{\|x\psi(x)\|_2^2 \|\hat{\psi}'(\xi)\|_2^2}{\|\psi\|_2^2 \|\hat{\psi}\|_2^2} \\ &= \frac{2\pi \|x\psi(x)\|_2^2 \|\psi'(\xi)\|_2^2}{\|\psi\|_2^2 \|\hat{\psi}\|_2^2} \\ &\geq \frac{\|x\psi(x)\psi'(x)\|_2^2}{\|\psi\|_2^4} \\ &\geq \frac{1}{\|\psi\|_2^4} \left| \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} x\psi(x)\overline{\psi'(x)} dx \right|^2 \\ &= \frac{1}{\|\psi\|_2^4} \left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 dx \right|^2 \\ &= \frac{1}{\|\psi\|_2^4} \left( \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}} \geq \frac{1}{2}.$$

□



El área de una ventana frecuencia-tiempo de una Gaussiana es la más pequeña,  $4\Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}} = 2$ . Por lo tanto, para el análisis de tiempo-frecuencia localizados, la función Gaussiana es la mejor. La transformada de Gabor usa la wavelet Gaussiana y ha sido usada tradicionalmente en la teoría de procesamiento de señales.

Al igual que la transformada de Fourier, la transformada wavelet también es invertible. La transformada wavelet inversa se puede ver como la reconstrucción de la señal original. El siguiente teorema muestra que la transformada wavelet preserva el producto escalar.

**Teorema 4.6** (Fórmula de Parseval para transformadas wavelets). *Sea  $\psi$  una wavelet básica. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{dadb}{a^2} = C_\psi \langle f, g \rangle$$

se cumple para cualesquiera  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , donde  $C_\psi$  es la condición admisibilidad y  $\langle f, g \rangle$  es el producto interno de  $f$  y  $g$ .

*Demostración.* Por la fórmula de Parseval para la transformada de Fourier, tenemos que

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle \\ &= \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{a,b} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) |a|^{1/2} e^{ibx} \overline{\hat{\psi}(ax)} dx \\ &= (2\pi)^{1/2} \mathcal{F}\{|a|^{1/2} \hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)}\}(-b), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \overline{(W_\psi g)(a, b)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} |a|^{1/2} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t) \hat{g}(y)} |a|^{1/2} e^{-iby} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= (2\pi)^{1/2} \overline{\mathcal{F}\{|a|^{1/2} \hat{g}(x) \hat{\psi}(ax)\}(-b)}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) \overline{(W_\psi g)(a, b)} \frac{dbda}{a^2} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(ax)}\}(-b) \overline{\mathcal{F}\{\hat{g}(x) \hat{\psi}(ax)\}(-b)} \frac{dbda}{a} \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} |\hat{\psi}(ax)|^2 dx \frac{da}{a},$$

por la fórmula de Parseval para la transformada de Fourier

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(ax)|^2 \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx,$$

por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(wx)|^2}{|w|} dw \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \\ &= C_\psi \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.7** (Calderon, Grossman, Morlet). *Sea  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  una wavelet. Entonces para cualquier  $f \in L^2(\mathbb{R})$  las siguientes relaciones se cumplen:*

$$(4.15) \quad f(t) = \frac{a}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a, b) |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2},$$

$$(4.16) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(W_\psi f)(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2}.$$

La última expresión se puede reescribir como:

$$\|f\|_{L^2} = \|W_\psi f(a, b)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left( \frac{dad b}{a^2} \right).$$

*Demostración.* Para alguna  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} C_\psi \langle f, g \rangle &= \langle W_\psi f, W_\psi g \rangle, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{db da}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\psi_{(a,b)}(t)} dt} \frac{db da}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \overline{\psi_{(a,b)}(t)} \frac{db da}{a^2} \overline{g(t)} dt, \\ &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \overline{\psi_{(a,b)}(t)} \frac{db da}{a^2}, g \right\rangle \end{aligned}$$

o sea que

$$\left\langle C_\psi - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{(a, b)} \frac{dbda}{a^2}, g \right\rangle = 0, \text{ para toda } g \in L^2(\mathbb{R})$$

Por lo tanto

$$C_\psi f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{(a, b)} \left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dbda}{a^2} = 0. \quad \square$$

La relación (4.15) se llama *resolución de la identidad* y la expresión (4.16) es la relación de isometría.

## 4.2. Marcos

Un conjunto de elementos unitarios  $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$  en un espacio de Hilbert  $H$  forman una base ortonormal de  $H$  si y sólo si

$$(4.17) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 = \|f\|_H^2 \text{ para toda } f \in H.$$

Ademas, en este caso

$$(4.18) \quad f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j$$

con convergencia en  $H$ , es decir, el elemento  $f$  puede recuperarse a partir de los números  $\langle f, \phi_j \rangle$  y los elementos de la base. Esta propiedad es muy importante porque ya no involucra la ortonormalidad.

En algunos podemos construir bases ortonormales de  $L^2(\mathbb{R})$ , por ejemplo, para las series de Fourier [9, §1.4]. En aplicaciones es muy util relajar la condición (4.17), pero también poder recuperar a  $f$  como en (4.18) y además tener una expresión explicita para los elementos de la base. Todo esto nos lleva a la noción de *marco*.

*Definición 4.8.* La colección de elementos  $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$  en un espacio de Hilbert  $H$ , se le denomina *marco* si existen constantes  $A$  y  $B$ ,  $0 \leq A \leq B < \infty$  tales que

$$(4.19) \quad A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

A las constantes  $A$  y  $B$  se les llama *cotas del marco*.

Un marco no necesariamente es una base; si agregamos el elemento cero a la colección  $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$  no cambia la desigualdad (4.19). Los elementos del marco no tienen que ser normales, pero si deben cumplir que  $\|\phi_k\| \leq \sqrt{B}$  para toda  $k \in \mathbb{Z}$ . Para ver esto, supongamos que  $\phi_k \neq 0$ , sustituyendo  $f = \phi_k$  y  $\|\phi_k\|^2 = |\langle \phi_k, \phi_k \rangle|$  en (4.19) obtenemos:

$$\|\phi_k\|^4 = |\langle \phi_k, \phi_k \rangle|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle \phi_k, \phi_j \rangle|^2 \leq B \|\phi_k\|^2,$$

entonces de la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} \|\phi_k\|^4 &\leq B \|\phi_k\|^2 \\ \|\phi_k\|^2 &\leq B \\ \|\phi_k\| &\leq \sqrt{B}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.9.** Si eliminamos todos los elementos cero de un marco, el marco nuevo no necesariamente es una base. Sea  $H = \mathbb{C}^2$  y tomemos

$$\phi_1 = (0, 1), \phi_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ y } \phi_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |\langle f, \phi_j \rangle|^2 &= |f_2|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2} f_1 - \frac{1}{2} f_2\right|^2 \\ &= |f_2|^2 + \frac{3}{4} f_1^2 + \frac{1}{4} f_2^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_1 f_2 + \frac{3}{4} f_1^2 + \frac{1}{4} f_2^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_1 f_2 \\ &= |f_2|^2 + \frac{3}{2} f_1^2 + \frac{1}{2} f_2^2 \\ &= \frac{3}{2} (f_1^2 + f_2^2) \\ &= \frac{3}{2} \|f\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $A = B = \frac{3}{2}$  en (4.19). La cota  $\frac{3}{2}$  es una medida de la redundancia del sistema, en este caso, tres vectores para representar un objeto en dos dimensiones.

Cuando  $A = B$  en la expresión (4.19), decimos que el marco es *estrecho*. Cualquier base ortonormal en un espacio de Hilbert es un marco estrecho con  $A = B = 1$ ; el marco del ejemplo anterior también es estrecho.

Si  $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$  es un marco estrecho y  $\|\phi_{j_0}\| \geq 1$  para algún  $j_0 \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$A = \|\phi_{j_0}\|^2 + \sum_{j \neq j_0} \frac{1}{\|\phi_{j_0}\|^2} |\langle \phi_{j_0}, \phi_j \rangle|^2 \geq 1.$$

En este caso, si el marco es estrecho y  $A = 1$  vemos que  $\phi_j \perp \phi_{j_0}$  para toda  $j \in \mathbb{Z}$  y  $\|\phi_{j_0}\| = 1$ . Por lo tanto, si todos los elementos del marco estrecho tienen norma 1 y  $A = 1$ , el marco es una base ortonormal para  $H$  (ver [5][Prop 3.2.1]).

Supongamos que  $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$  es un marco estrecho, entonces

$$(4.20) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_j \rangle \phi_j|^2 = A \|f\|^2 \text{ para toda } f \in H,$$

[9, teorema 1.7, Cap 7] muestra que

$$(4.21) \quad f = \frac{1}{A} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j \text{ para toda } f \in H,$$

con convergencia en  $H$ . Por lo tanto, podemos reconstruir a  $f$  a partir de los coeficientes  $\langle f, \phi_j \rangle$ .

Cuando el marco no es estrecho, también es posible encontrar una fórmula de reconstrucción similar a (4.21). Consideremos un marco  $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$  y  $l^2(\mathbb{Z})$  el espacio de todas las sucesiones  $\{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  tal que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |c_j|^2 < \infty.$$

Ahora definimos el *operador marco*  $\mathcal{F} : H \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$  como

$$(4.22) \quad \mathcal{F}f = \{\langle f, \phi_j \rangle\}_{j \in \mathbb{Z}}.$$

Siempre que  $\mathcal{F}$  es lineal, (4.19) implica la continuidad de  $\mathcal{F}$  con  $\|\mathcal{F}\| \leq \sqrt{B}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{F}$  tiene un adjunto  $\mathcal{F}^* : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow H$  que satisface  $\|\mathcal{F}\| = \|\mathcal{F}^*\| \leq \sqrt{B}$  y

$$\begin{aligned} \langle f, \mathcal{F}^*(\{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}}) \rangle &= \langle \mathcal{F}f, \{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle \bar{c}_j \\ &= \langle f, \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \phi_j \rangle. \end{aligned}$$

Así, la continuidad de  $\mathcal{F}$  implica que

$$(4.23) \quad \mathcal{F}^*(\{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \phi_j$$

con convergencia en la norma de  $H$ . Si  $S = \mathcal{F}^* \mathcal{F}$  tenemos que

$$(4.24) \quad Sf = \mathcal{F}^* \mathcal{F} f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j,$$

para toda  $f \in H$ , entonces podemos reescribir la expresión (4.19) como

$$(4.25) \quad A \langle f, f \rangle \leq \langle Sf, f \rangle \leq B \langle f, f \rangle \text{ para toda } f \in H.$$

Esto muestra que  $S$  es un operador lineal acotado positivo que satisface

$$(4.26) \quad AI \leq S \leq BI,$$

en donde  $I$  es el operador identidad en el espacio de Hilbert  $H$ . De (4.26) podemos deducir que  $S$  tiene inversa la cual satisface

$$(4.27) \quad \frac{1}{B} I \leq S^{-1} \leq \frac{1}{A} I.$$

Estas desigualdades permiten construir un marco asociado a  $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ , el *marco dual*.

**Lema 4.10.** *Si  $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$  es un marco sobre un espacio de Hilbert  $H$  cuyas cotas del marco son  $A$  y  $B$ , el conjunto  $\{\widehat{\phi}_j := S^{-1}(\phi_j) : j \in \mathbb{Z}\}$  también es un marco para  $H$  con cotas  $\frac{1}{B}$  y  $\frac{1}{A}$ ; a este marco nuevo lo llamaremos marco dual a  $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ .*

La demostración puede verse en [9, Cap 8.].

### 4.3. Marcos de traslaciones y dilataciones

Una vez que hemos estudiado marcos, ahora encontraremos condiciones sobre un sistema de la forma

$$(4.28) \quad \psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

generado por traslaciones y dilataciones de una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  y que forman un marco en  $L^2(\mathbb{R})$ . Cada wavelet ortonormal es un marco de esta forma, pero al revés no.

Si (4.28) es un marco, la sección anterior nos dice como construir el marco dual  $\widetilde{\psi}_{j,k} = S^{-1} \psi_{j,k}$ , en donde  $S = \mathcal{F}^* \mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}$  es el operador marco. El operador  $S = \mathcal{F}^* \mathcal{F}$  conmuta con las dilataciones  $(\delta^m f)(x) = 2^{\frac{m}{2}} f(2^m x)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  [9]:

$$((\mathcal{F}^* \mathcal{F})(\delta^m f))(x) = 2^{\frac{m}{2}} (\mathcal{F}^* \mathcal{F} f)(2^m x) = \delta^m (\mathcal{F}^* \mathcal{F} f)(x).$$

Por lo tanto,  $S^{-1}$  también conmuta con estas dilataciones:

$$\widetilde{\psi}_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \widetilde{\psi}_{0,k}(2^j x).$$

Por lo tanto, para  $k$  fija, las funciones  $\widetilde{\psi}_{j,k}$  son todas las dilataciones de una función simple  $\widetilde{\psi}_{0,k}$ . Lo anterior no ocurre para las traslaciones  $(\tau_k f)(x) = f(x - k)$  [9]:

$$((\mathcal{F}^* \mathcal{F})(\tau_l f))(x) = \tau_l(\mathcal{F}^* \mathcal{F} f)(x)$$

es válido si  $2^j l$  es un entero, lo cual es cierto para cada  $l$  sólo cuando  $j \geq 0$ . Por lo tanto, en general, no siempre se puede tener el marco dual generado por dilataciones y traslaciones de una función simple.

El problema ahora es encontrar condiciones suficientes sobre  $\psi$  para que (4.28) sea un marco. Definamos

$$t_m(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2m\pi))}, \quad \xi \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}$$

y

$$S(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Sean

$$\underline{S}_\psi = \operatorname{ess\,inf}_{\xi \in \mathbb{R}} S(\xi), \quad \overline{S}_\psi = \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}} S(\xi)$$

y

$$\beta(\psi_m) = \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

En todas las expresiones dentro del ínfimo y del supremo en las definiciones anteriores son invariantes bajo dilataciones (escalamientos) por 2, así que estos ínfimos y supremos sólo es necesario calcularlos sobre  $1 \leq |\xi| \leq 2$ .

**Teorema 4.11.** *Sea  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  tal que*

$$A_\psi = \underline{S}_\psi - \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} [\beta_\psi(q) \beta_\psi(-q)]^{\frac{1}{2}} > 0,$$

y

$$B_\psi = \overline{S}_\psi + \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} [\beta_\psi(q) \beta_\psi(-q)]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Entonces,  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  es un marco con cotas  $A_\psi$  y  $B_\psi$ .

La demostración puede verse en [5].

## 4.4. Wavelets discretas

Ahora vamos a considerar la transformada wavelet de una señal continua  $x(t)$ , pero con parámetros de traslación y escalamiento  $a$  y  $b$  discretos. Una manera natural de muestrear los parámetros  $a$  usando discretización logarítmica de la escala  $a$  y ligarlo al tamaño de paso de  $b$ , es decir, moverse en pasos discretos a cada localización de  $b$  el cual es proporcional a la escala  $a$ . Esta discretización de la wavelet tiene la siguiente forma [5]

$$(4.29) \quad \psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right),$$

donde  $m, n \in \mathbb{Z}$  controlan el escalamiento y la traslación respectivamente;  $a_0$  es el tamaño de paso de dilatación fijo mayor que 1 y  $b$  es el parámetro de localización que debe ser mayor que cero. De la ecuación (4.29), el tamaño de paso de la traslación  $\delta b = b_0 a_0^m$  es directamente proporcional a la escala wavelet  $a_0^m$ . Por lo tanto, la transformada wavelet de la señal continua  $x(t)$  usando wavelets discretas de la forma (4.29) esta dada por

$$(4.30) \quad T_{m,n}x = \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{1}{a_0^{m/2}} \psi(a_0^{-m}t - nb_0) dt,$$

la cual también se puede expresar como producto interno

$$(4.31) \quad T_{m,n}x = \langle x, \psi_{m,n} \rangle,$$

en donde  $T_{m,n}x$  son los valores de la transformada wavelet discreta (DWT). A los valores  $T_{m,n}$  se les conoce como *coeficientes wavelet* o *coeficientes de detalle*, los cuales permiten determinar que tan buena es la representación en el espacio wavelet de una señal utilizando esta descomposición. Los marcos de wavelets proporcionan el marco teórico para estudiar wavelets discretas ya que se construyen muestreando los parámetros del tiempo y escala de una transformada wavelet continua.

La familia de funciones wavelet constituye un marco en el cual la energía de los coeficientes wavelet esta acotada

$$(4.32) \quad AE \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |T_{m,n}|^2 \leq BE,$$

en donde  $T_{m,n}$  son los coeficientes wavelet,  $a$  y  $b$  son las cotas del marco y  $E$  es la energía de la señal original  $x(t)$ :

$$E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt < \infty.$$



$A$  y  $B$  dependen de los parámetros  $a_0$  y  $b_0$ . Si  $A = B$  se dice que el marco es “estreocho”. Un marco estrecho tiene la siguiente fórmula de reconstrucción

$$(4.33) \quad x(t) = \frac{1}{A} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} x \psi_{m,n}(t).$$

Cuando  $A = B > 1$  el marco estrecho es redundante y  $A$  es la medida de redundancia. Sin embargo, si  $A = B = 1$  la familia de wavelets definida por el marco forma una base ortonormal. Si  $A \neq B$  la fórmula de reconstrucción puede escribirse como

$$(4.34) \quad x'(t) = \frac{2}{A+B} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t),$$

en donde  $x'(t)$  difiere de  $x(t)$  por un error que depende de las cotas, el cual es aceptable y pequeño cuando  $B/A \approx 1$ , es decir,  $x'(t) \rightarrow x(t)$ .

Los valores más comunes de  $a_0$  y  $b_0$  son 2 y 1 respectivamente. Al escalamiento logarítmico en potencias de dos de los tamaños de paso de la traslación y la dilatación se le conoce cómo *arreglo malla diádica*. Sustituyendo  $a_0 = 2$  y  $b_0 = 1$  en la ecuación (4.29), la wavelet de la malla diádica se escribe como

$$(4.35) \quad \psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right),$$

simplificando la expresión anterior

$$(4.36) \quad \psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n).$$

## 4.5. Wavelets ortogonales

Generalmente las wavelets de malla diádica discreta se toman de manera que sean ortogonales. Estas wavelets son ortogonales entre sí y se normalizan para que tengan energía uno, es decir,

$$(4.37) \quad \int_{\mathbb{R}} \psi_{m,n}(t) \psi'_{m',n'}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = m' \text{ y } n = n' \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como el producto de cada wavelet con las demás del sistema diádico es cero, la información almacenada en un coeficiente wavelet  $T_{m,n}x$  no se repite, por lo tanto permite la reconstrucción completa de la señal original sin redundancia. Las wavelets ortonormales tienen cotas de sus marcos  $a = b = 1$  y la familia de wavelets correspondiente es una base ortonormal.

Usando la ecuación (4.35), la transformada wavelet discreta (DWT) puede escribirse como:

$$(4.38) \quad T_{m,n}x = \int_{\mathbb{R}} x(t)\psi_{m,n}(t)dt.$$

Si tomamos una base ortonormal de wavelets,  $\psi_{m,n}(t)$ , entonces podemos reconstruir la señal original en términos de los coeficientes wavelet  $T_{m,n}(t)$ , usando la inversa de la transformada wavelet discreta:

$$(4.39) \quad x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n}x\psi_{m,n}(t),$$

la cual puede escribirse mediante producto interno

$$(4.40) \quad x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle x, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}(t),$$

Adicionalmente, como  $A = B = 1$  la energía de la señal puede escribirse como

$$(4.41) \quad \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |T_{m,n}|^2.$$

## 4.6. La función de escalamiento

La transformada wavelet discreta tiene asociada una ecuación de dilatación y su función de escalamiento, la cual contiene información sobre la suavidad de la señal, además de tener una expresión análoga a la función wavelet:

$$(4.42) \quad \phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\phi(2^{-m}t - n),$$

la cual cumple que

$$(4.43) \quad \int_{\mathbb{R}} \phi_{0,0}(t)dt = 1$$

en donde  $\phi_{0,0} = \phi(t)$  y generalmente se le llama *función de escalamiento* [1]. La función de escalamiento es ortogonal a las traslaciones pero no a las dilataciones. Si se convoluciona la función de escalamiento con la señal, entonces obtenemos los *coeficientes de aproximación*:

$$(4.44) \quad S_{m,n} = \int_{\mathbb{R}} x(t)\phi_{m,n}(t)dt.$$

A los coeficientes de aproximación a la escala  $m$  se les conoce como *aproximación discreta* de la señal en esa escala. Es posible generar una *aproximación continua* de la señal mediante series que tienen la forma:

$$(4.45) \quad x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{m,n} \phi_{m,n}(t)$$

en donde  $x_m(t)$  es una versión suave que depende de la función de escalamiento de la señal  $x(t)$  a la escala  $m$ .

Podemos representar la señal  $x(t)$  mediante una expansión en series combinadas de coeficientes de aproximación y coeficientes wavelet de la siguiente manera:

$$(4.46) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{m_0,n} \phi_{m_0,n}(t) + \sum_{m=-\infty}^{m_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t),$$

en esta ecuación, la señal continua original se descompone como una aproximación de sí misma, a una escala arbitraria  $m_0$ , agregándole una sucesión de detalles que están por debajo de la escala  $m_0$ .

La *señal de detalle* a la escala  $m$  se define como

$$(4.47) \quad d_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n} \psi_{m,n}(t),$$

así que la señal (4.46) puede reescribirse como

$$(4.48) \quad x(t) = x_{m_0}(t) + \sum_{m=-\infty}^{m_0} d_m(t).$$

De esta ecuación podemos ver que

$$(4.49) \quad x_{m-1}(t) = x_m(t) + d_m(t)$$

es decir, que si agregamos la señal de detalle a una escala arbitraria  $m$  a la aproximación a la misma escala, entonces obtenemos la aproximación de la señal a una resolución mayor. A este proceso se le llama *representación multirresolución* (ver capítulo 4).

## 4.7. La ecuación wavelet y la ecuación de escalamiento

La *ecuación de escalamiento* o ecuación de dilatación, describe a la función de escalamiento  $\phi(t)$  en términos de versiones contraídas y con corrimientos de sí misma, las cuales tienen la siguiente forma

$$(4.50) \quad \phi(t) = \sum_k c_k \phi(2t - k)$$

en donde  $\phi(2t - k)$  es una versión contraída de  $\phi(t)$  con corrimientos a lo largo del eje horizontal de tamaño entero  $k$  y multiplicada por un *coeficiente de escalamiento* asociado  $c_k$  [1]. La ecuación (4.50) indica como construir una función de escalamiento a una escala del número de ecuaciones de escalamiento en la escala anterior. La solución a esta ecuación en diferencias biescala nos da precisamente la función de escalamiento  $\phi(t)$ . Debido a que las wavelets tienen soporte compacto, estas tienen sucesiones de coeficientes de escalamiento distintos de cero los cuales son de longitud finita. Los coeficientes de escalamiento deben cumplir que

$$(4.51) \quad \sum_k c_k = 2,$$

adicionalmente para que el sistema sea ortogonal también se requiere que

$$(4.52) \quad \sum_k c_k c_{k+2k'} = \begin{cases} 2 & \text{si } k' = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, la suma de los cuadrados de los coeficientes de escalamiento es igual a 2. Estos mismos coeficientes se usan en sentido contrario con signo alternante, para construir la ecuación wavelet asociada:

$$(4.53) \quad \psi(t) = \sum_k (-1)^k c_{1-k} \phi(2t - k),$$

para así asegurar que las wavelets y sus correspondientes funciones de escalamiento sean ortogonales. Las wavelets con soporte compacto tienen un número finito de coeficientes de escalamiento  $N_k$ , así que podemos definir a la función wavelet como

$$(4.54) \quad \psi(t) = \sum_k (-1)^k c_{N_k-1-k} \phi(2t - k).$$

Los coeficientes wavelet se ordenan de esta manera para que tengan soporte en el mismo intervalo  $[0, N_k - 1]$  y pueden escribirse de manera más compacta:

$$(4.55) \quad b_k = (-1)^k c_{N_k-1-k}$$

donde la suma de todos los coeficientes  $b_k$  es cero. Mediante estos coeficientes  $b_k$  la ecuación (4.54) puede reescribirse como

$$(4.56) \quad \psi(t) = \sum_{k=0}^{N_k-1} b_k \phi(2t - k).$$

De las ecuaciones (4.42), (4.50) y calculando la wavelet a una escala  $m + 1$ , obtenemos que para valores arbitrarios  $m$  se cumple que

$$(4.57) \quad 2^{-(m+1)/2} \phi\left(\frac{t}{2^{m+1}} - n\right) = 2^{-m/2} 2^{-1/2} \sum_k \phi\left(\frac{2t}{2 \times 2^m} - 2n - k\right),$$

simplificando

$$(4.58) \quad \phi_{m+1,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k \phi_{m,2n+k}(t).$$

Análogamente, la función wavelet se escribe como:

$$(4.59) \quad \psi_{m+1,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_k \phi_{m,2n+k}(t).$$

## 4.8. La wavelet de Haar

La base para la wavelet de Haar se obtiene con un multirresolución que es constante por partes. La función de escalamiento tiene únicamente dos coeficientes de escalamiento distintos de cero y esta dada por

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t - 1),$$

sus coeficientes de escalamiento son  $c_0 = c_1 = 1$ . Estos se obtienen resolviendo simultáneamente

$$(4.60) \quad c_0 + c_1 = 2$$

$$(4.61) \quad c_0 c_0 + c_1 c_1 = 2.$$

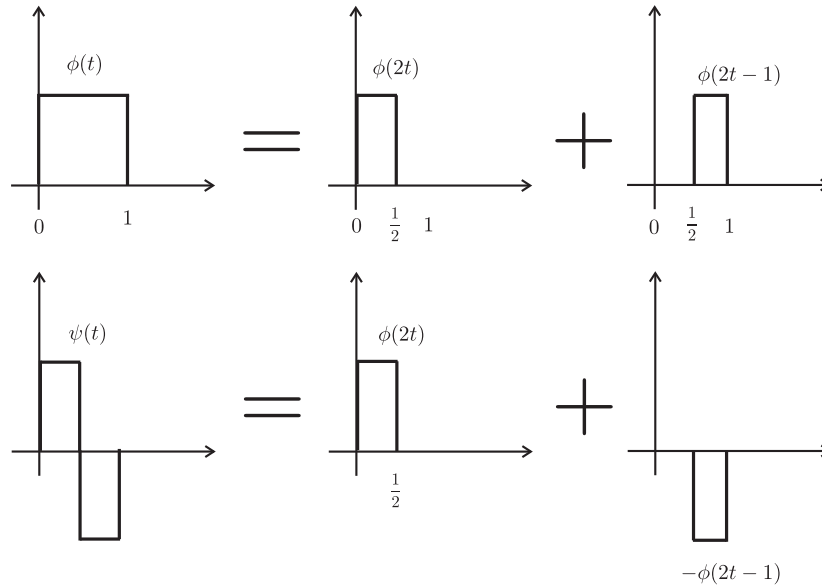


Figura 4.2: La función wavelet y la función de escalamiento de Haar.

La función de escalamiento también puede escribirse como:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La ecuación wavelet de Haar correspondiente es

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1),$$

y esta definida como

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2) \\ -1 & \text{si } x \in [1/2, 1) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La wavelet madre para el sistema de Haar es  $\psi(t) = \psi_{0,0}(t)$  y esta formada de dos pulsos de bloques unitarios dilatados uno después del otro sobre el eje del tiempo. A partir de esta wavelet madre puede construirse el sistema de Haar de wavelets sobre una malla diádica  $\psi_{m,n}(t)$ . La wavelet de Haar tiene longitud finita, es decir, tiene soporte compacto.

## 4.9. La transformada wavelet rápida

Los coeficientes de aproximación a la escala  $m + 1$  están dados por

$$(4.62) \quad S_{m+1,n} = \int_{\mathbb{R}} x(t) \phi_{m+1,n}(t) dt,$$

sustituyendo la ecuación (4.58), tenemos que

$$S_{m+1,n} = \int_{\mathbb{R}} x(t) \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k \phi_{m,2n+k}(t) \right] dt$$

es decir

$$(4.63) \quad S_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k \left[ \int_{\mathbb{R}} x(t) \phi_{m,2n+k}(t) dt \right]$$

en donde la integral que esta entre corchetes son los coeficientes de aproximación  $S_{m,n+2k}$  para cada  $k$ . Entonces, esta ecuación se puede escribir como

$$(4.64) \quad T_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k S_{m,2n+k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_{k-2n} S_{m,k}$$

Por lo tanto, mediante esta ecuación podemos generar los coeficientes de aproximación a la escala  $m + 1$  utilizando los coeficientes de escalamiento de la escala anterior [1].

Análogamente, podemos calcular los coeficientes wavelet a partir de los coeficientes de aproximación de la escala anterior, utilizando los coeficientes de escalamiento  $b_k$  reordenados como sigue

$$(4.65) \quad T_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_k S_{m,2n+k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_{k-2n} S_{m,k}.$$

Si conocemos los coeficientes de aproximación  $S_{m_0,n}$  a una escala  $m_0$ , entonces podemos generar los coeficientes de detalle wavelet y de aproximación a escalas mayores a  $m_0$ , aplicando de manera repetida las ecuaciones (4.63) y (4.64), las cuales representan el algoritmo de *descomposición multirresolución*. Este algoritmo de descomposición permite calcular los coeficientes wavelet más rápidamente que utilizar convoluciones o productos internos. Al iterar las ecuaciones (4.63) y (4.64) realizamos un filtrado pasa-bajas y uno pasa-altas respectivamente de la salida, es decir, los vectores que contienen las sucesiones  $(1/\sqrt{2})c_k$  es el filtro pasa-bajas y  $(1/\sqrt{2})b_k$  es el filtro pasa-altas.

Ahora veamos como reconstruir  $S_{m,n}$  a partir de  $S_{m+1,n}$  y  $T_{m+1,n}$ . Sabemos que  $x_{m-1}(t) = x_m(t) + d_m(t)$ , esta expresión podemos expandirla como

$$(4.66) \quad x_{m-1}(t) = \sum_n S_{m,n} \phi_{m,n}(t) + \sum_{m,n} T_{m,n} \psi_{m,n}(t)$$

Utilizando las ecuaciones (4.63) y (4.64) podemos reescribir esta ecuación en términos de la función de escalamiento en la escala anterior como sigue:

$$(4.67) \quad x_{m-1}(t) = \sum_n S_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_k \phi_{m-1,2n+k}(t) + \sum_n T_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_k \phi_{m-1,2n+k}(t)$$

reacomodando los índices de la suma obtenemos

$$(4.68) \quad x_{m-1}(t) = \sum_n S_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k c_{k-2n} \phi_{m-1,k}(t) + \sum_n T_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k b_{k-2n} \phi_{m-1,k}(t).$$

Por otro lado, podemos expandir  $x_{m-1}(t)$  en términos de los coeficientes de aproximación a la escala  $m - 1$ , es decir

$$(4.69) \quad x_{m-1}(t) = \sum_n S_{m-1,n} \phi_{m-1,n}(t).$$



# Capítulo 5

## Análisis multirresolución

El concepto del análisis multirresolución (MRA) es el corazón de la teoría de wavelets, en donde una función puede verse a varios niveles de aproximaciones o “resoluciones”. Aplicando el MRA podemos dividir una función complicada en varias funciones simples y estudiarlas por separado.

La idea intuitiva del análisis multiresolución es proyectar una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  sobre una sucesión de subespacios  $V_j, V_{j+1}$  tales que su proyección sean aproximaciones cada vez más finas de  $f$ , dichos subespacios  $V_j$  se obtienen mediante la función de escalamiento (4.43), mientras que los subespacios de resoluciones se obtienen mediante la función wavelet (4.3).

### 5.1. Definición del análisis multiresolución

*Definición 5.1.* [18] Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Entonces una sucesión en  $H$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  es una *base de Riesz* de  $H$ , si cumple las siguientes condiciones:

1.  $\overline{\text{gen}}\{e_j\}_{j=1}^{\infty} = H$ , es decir,  $\forall x \in H$  y  $\forall \epsilon > 0$ , existe  $\sum_{j=1}^n c_j e_j$ , tal que  $\|x - \sum_{j=1}^n c_j e_j\| < \epsilon$ ;
2. Existen constantes  $A$  y  $B$ , tales que:

$$A \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \right\|^2 \leq B \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2, \quad \forall \{c_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2.$$

a las constantes  $A$  y  $B$  se les llama cota inferior y cota superior de la base de Riesz, respectivamente.

En particular, si  $A = B = 1$ , decimos que  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  es una base ortonormal.

**Definición 5.2.** [18] Una *aproximación multirresolución* de  $L^2(\mathbb{R})$  es una sucesión  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de subespacios cerrados de  $L^2(\mathbb{R})$  tales que cumplen las siguientes condiciones:

1.  $V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$ ,
2.  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$  y  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ,
3.  $f(x) \in V_j$  sí y solo sí  $f(2x) \in V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$ ,
4. si  $f(x) \in V_j$ , entonces  $f(x - 2^{-j}k) \in V_j \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ ,
5. Existe un isomorfismo  $I$  que va de  $V_0$  sobre  $l^2(\mathbb{Z})$  el cual conmuta con la acción de  $\mathbb{Z}$ .

La propiedad 5, la acción de  $\mathbb{Z}$  sobre  $V_0$  es la traslación por un entero de funciones, mientras que la acción de  $\mathbb{Z}$  sobre  $l^2(\mathbb{Z})$  es la traslación usual. La aproximación de una función  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  a una resolución  $2^j$  se define como la proyección ortogonal de  $f(x)$  sobre  $V_j$ , la cual se calcula a partir de una función de escalamiento  $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , tal que para toda  $j \in \mathbb{Z}$   $(\sqrt{2^j}\phi(2^jx - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_j$ .

La información adicional disponible en una aproximación a una resolución  $2^{j+1}$  comparada con la resolución  $2^j$ , esta dada por la proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ .

## 5.2. Bases ortonormales de aproximaciones multirresolución

A continuación probaremos la existencia de una única función  $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  tal que para cierta  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $(\sqrt{2^j}\phi(2^jx - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal wavelet de  $V_j$  [12].

Consideremos la propiedad 5 de la aproximación multirresolución. El operador  $I$  es un isomorfismo de  $V_0$  sobre  $l^2(\mathbb{Z})$ , por lo cual debe existir una función  $g(x)$  que satisface

$$(5.1) \quad g(x) \in V_0, \quad I(g(x)) = \epsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n \neq 0 \end{cases}.$$

Como  $I$  conmuta con traslaciones de enteros

$$I(g(x - k)) = \epsilon(n - k).$$

La sucesión  $(\epsilon(n - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base de  $l^2(\mathbb{Z})$ , por lo tanto  $(g(x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base de  $V_0$ . Sean  $I(f(x)) = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  y  $f(x) \in V_0$ . Como  $I$  es un isomorfismo,  $\|f\|$  y  $(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2)^{\frac{1}{2}}$  son dos normas equivalentes en  $V_0$ , por lo tanto  $f(x)$  puede descomponerse como

$$(5.2) \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k g(x - k),$$

aplicando la transformada de Fourier a la ecuación anterior, tenemos que

$$(5.3) \quad \hat{f}(\omega) = M(\omega)\hat{g}(\omega), \quad \text{donde } M(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\omega}.$$

La norma de  $f(x)$  está dada por

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{2\pi} |M(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 d\omega$$

Como  $\|f\|$  y  $(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2)^{\frac{1}{2}}$  son dos normas equivalentes sobre  $V_0$ , se sigue que

$$(5.4) \quad \exists C_1, C_2 > 0 \quad \text{tal que } \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad C_1 \leq (|\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2)^{\frac{1}{2}} \leq C_2.$$

La existencia de una base de Riesz  $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $V_0$  proporciona un teorema de discretización. La función  $g$  puede interpretarse como una celda de resolución unitaria. Así que existen  $A > 0$  y  $B$  tales que cualquier  $f \in V_0$  se puede descomponer de manera única como

$$(5.5) \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k g(x - k),$$

donde

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 \leq B\|f\|^2$$

Esta equivalencia en la energía garantiza que la expansión de la señal sobre  $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sea estable numéricamente. Con la propiedad de la dilatación 3 de la definición 5.2 y la expansión (5.5) podemos verificar que  $\{2^{-j/2}g(2^{-j}x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz de  $V_j$  con las mismas cotas de Riesz  $A$  y  $B$  a escalas de tamaño  $2^j$ . La siguiente proposición nos da una condición necesaria y suficiente para que  $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sea una base de Riesz.

**Proposición 5.3.** [11] Una familia  $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz del espacio que  $V_0$  genera sí y solo si existen  $A > 0$  y  $B > 0$  tales que

$$(5.6) \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi], \frac{1}{B} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\omega - 2k\pi)|^2 \leq \frac{1}{A}.$$

*Demostración.* Cualquier  $f \in V_0$  puede descomponerse como

$$(5.7) \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k g(x - k),$$

y su transformada de Fourier está dada por

$$(5.8) \quad \hat{f}(\omega) = \hat{a}(\omega) \hat{g}(\omega)$$

donde  $\hat{a}(\omega)$  es la serie de Fourier

$$\hat{a}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\omega}.$$

La norma de  $f$  puede reescribirse como

$$(5.9) \quad \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{a}(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2 d\omega,$$

ya que  $\hat{a}(\omega)$  tiene periodo  $2\pi$ . La familia  $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz sí y solo si

$$(5.10) \quad A\|f\|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{a}(\omega)|^2 d\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 \leq B\|f\|^2$$

Si  $\hat{g}$  satisface (5.6) entonces (5.10) se deriva de (5.9). La independencia lineal de  $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  se debe a que (5.10) es válida para cualquier  $\alpha_k$  que satisface (5.7). Si  $f = 0$  entonces necesariamente  $\alpha_k = 0$  para toda  $k \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, la familia  $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz de  $V_0$ .

Ahora supongamos que  $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base Riesz, entonces (5.10) es válida para toda  $\alpha_k \in l^2(\mathbb{Z})$ . Si tanto la cota superior como la inferior de (5.6) no se cumplen para toda  $\omega \in [-\pi, \pi]$ , entonces podemos construir una función  $2\pi$  periódica no cero  $\hat{a}(\omega)$  cuyo soporte corresponde a frecuencias en donde (5.6) no se cumple. Entonces de (5.9) se sigue que (5.10) no es válida para  $\alpha_k$ , lo cual contradice la hipótesis de base de Riesz.  $\square$

A continuación necesitamos fijar condiciones de regularidad sobre las aproximaciones multirresolución de  $L^2(\mathbb{R})$ . Decimos que una función  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  es regular sí y solo si ésta es continuamente diferenciable y satisface:

$$(5.11) \quad \exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq C(1+x^2)^{-1} \text{ y } |f'(x)| \leq C(1+x^2)^{-1}.$$

Una aproximación multirresolución  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  es regular sí y solo si  $g(x)$  es regular.

### 5.3. La función de escalamiento

La aproximación de  $f$  a una resolución  $2^{-j}$  se define como la proyección ortogonal  $P_{V_j}f$  sobre  $V_j$ . Para calcular dicha proyección, primero necesitamos encontrar una base ortonormal de  $V_j$ . El siguiente teorema ortogonaliza la base de Riesz  $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  y construye una base ortogonal de cada espacio  $V_j$  mediante dilataciones y traslaciones de la función  $\phi$  que llamaremos *función de escalamiento*. Para prevenir la confusión de la resolución  $2^{-j}$  y la escala  $2^j$ , a la expresión  $P_{V_j}f$  la llamaremos aproximación a una escala  $2^j$ .

La propiedad (2) de una aproximación multirresolución implica que

$$\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{-1} \subset V_0.$$

Así que la función  $\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right)$  puede descomponerse en su base ortonormal  $(\phi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $V_0$  como

$$(5.12) \quad \frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi(x-k), \text{ donde } \alpha_k = \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{x}{2}\right) \overline{\phi(x-k)} dx.$$

Como la aproximación multirresolución es regular, el decaimiento asintótico de  $\alpha_k$  satisface  $|\alpha_k| = O(1+k^2)^{-1}$ . La transformada de Fourier de (5.12) cumple que

$$(5.13) \quad \hat{\phi}(2\omega) = H(\omega)\hat{\phi}(\omega), \text{ donde } H(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\omega}.$$

La ecuación de escalamiento (5.12) relaciona una dilatación de  $\phi$  por 2 con sus traslaciones enteras. La sucesión  $\alpha_k$  se interpretará como un filtro discreto.

Ahora expresaremos directamente a  $\hat{\phi}(\omega)$  como un producto de dilataciones de  $\hat{a}(\omega)$ . Para cualquier  $p \geq 0$ , la expresión (5.12) implica que

$$(5.14) \quad \hat{\phi}(2^{-p+1}\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}(2^{-p}\omega)\hat{\phi}(2^{-p}\omega),$$

y sustituyendo, tenemos que

$$(5.15) \quad \hat{\phi}(\omega) = \left( \prod_{p=1}^P \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \right) \hat{\phi}(2^{-p}\omega).$$

Si  $\hat{\phi}(\omega)$  es continua en  $\omega = 0$ , entonces  $\lim_{P \rightarrow +\infty} \hat{\phi}(2^{-p}\omega) = \hat{\phi}(0)$ , por lo que

$$(5.16) \quad \hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \hat{\phi}(0).$$

El siguiente teorema proporciona una condición necesaria sobre  $H(\omega)$ .

**Teorema 5.4.** [11] *La función  $H(\omega)$  definida anteriormente satisface:*

1.  $|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1$ ,
2.  $|H(0)| = 1$ .

*Demostración.* Utilizando la fórmula de Poisson, podemos expresar la ortogonalidad de la familia  $(\phi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  como

$$(5.17) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

por lo tanto

$$(5.18) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(2\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

Como  $\hat{\phi}(2\omega) = H(\omega)\hat{\phi}(\omega)$ , la suma se puede reescribir como

$$(5.19) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(\omega + k\pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega + k\pi)|^2 = 1.$$

La función  $H(\omega)$  es  $2\pi$  periódica, reagrupando los términos para  $k \in 2\mathbb{Z}$  y  $k \in 2\mathbb{Z} + 1$ , tenemos que la ecuación (5.17) cumple que

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad \square$$

Sea  $P_{V_j}$  la proyección ortogonal sobre  $V_j$ . Como  $(\sqrt{2^j}\phi(2^j x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_j$ , el kernel de  $P_{V_j}$  se puede escribir como

$$(5.20) \quad 2^j K(2^j x, 2^j y), \text{ donde } K(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x - k) \overline{\phi}(x - k).$$

De la propiedad (2) se sigue que la sucesión de operadores  $(P_{V_j})_{j \in \mathbb{Z}}$  tiende a  $Id$  en el sentido de convergencia fuerte de operadores. El siguiente lema demuestra que el kernel de  $K(x, y)$  debe satisfacer  $\int_{\mathbb{R}} K(x, y) dy = 1$ .

**Lema 5.5.** *Sea  $g(x)$  una función regular. Entonces las siguientes dos propiedades son equivalentes:*

$$(5.21) \quad \int_{\mathbb{R}} A(x, y) dy = 1, \quad \text{para casi toda } x$$

*La sucesión de operadores  $(T_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  cuyos kernels son  $2^j A(2^j x, 2^j y)$ , tiende a  $Id$  en el sentido de convergencia fuerte de operadores.*

Del lema anterior, se sigue que

$$(5.22) \quad \int_{\mathbb{R}} K(x, y) dy = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\gamma} \phi(x - k) = 1,$$

donde

$$(5.23) \quad \gamma = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) dy = \hat{\phi}(0).$$

Integrando (5.22) con respecto a  $x$  en el intervalo  $[0, 1]$ , obtenemos que  $|\hat{\phi}(0)|^2 = 1$ . Como  $\hat{\phi}(2\omega) = H(\omega)\hat{\phi}(\omega)$ , entonces  $|H(0)| = 1$ .

El siguiente teorema relaciona la función de escalamiento  $\phi(x)$  con la aproximación multirresolución.

**Teorema 5.6.** *Sea  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  una aproximación multirresolución y  $\phi$  la función de escalamiento cuya transformada de Fourier es*

$$(5.24) \quad \hat{\phi}(x) = \frac{\hat{g}(x)}{(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2)^{1/2}}$$

Sea

$$\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-n}{2^j}\right).$$

Entonces la familia  $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_j$  para toda  $j \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Para construir una base ortonormal, necesitamos encontrar una función  $\phi \in V_0$  que pueda expandirse sobre la base  $\{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , es decir

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n g(x - k),$$

entonces

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{a}(\omega) \hat{g}(\omega),$$

en donde  $\hat{a}$  es una serie de Fourier  $2\pi$ -periódica que tiene energía finita. Para calcular  $\hat{a}$  expresamos la ortogonalidad de  $\{\phi(x - k)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  en el dominio de Fourier. Sea  $\tilde{\phi}(x) = \overline{\phi(-x)}$ . Para cualquier  $(n, z) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$\begin{aligned} \langle \phi(x - n), \phi(x - p) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x - n) \phi^*(x - p) dx \\ (5.25) \qquad \qquad \qquad &= \phi * \tilde{\phi}(p - n). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\{\phi(x - k)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal sí y solo si  $\phi * \tilde{\phi}(n) = \delta_n$ . Calculando la transformada de Fourier obtenemos nuevamente

$$(5.26) \qquad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

En efecto, la transformada de Fourier de  $\phi * \tilde{\phi}(x)$  es  $|\hat{\phi}(\omega)|^2$  y por la proposición 6, el denominador tiene cota inferior estrictamente positiva, así que  $\hat{a}$  es una función  $2\pi$  periódica de energía finita.  $\square$

Las proyecciones ortogonales de  $f$  sobre  $V_j$  se obtienen mediante una expansión en la base ortogonal de escalamiento

$$(5.27) \qquad P_{V_j} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n},$$

y los productos internos

$$(5.28) \qquad \alpha_{j,n} = \langle f, \phi_{j,n} \rangle$$

proporcionan una aproximación discreta a una escala  $2^j$ , así que podemos reescribirlas como una convolución, es decir

$$(5.29) \qquad \alpha_{j,n} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) dx = f * \bar{\phi}_j(2^j n),$$



en donde  $\bar{\phi}_j(x) = \sqrt{2^{-j}}\phi(2^{-j}x)$ . La energía de la transformada de Fourier esta generalmente concentrada en  $[-\pi, \pi]$ . Consecuentemente, la transformada de Fourier  $\sqrt{2^j}\hat{\phi}^*(2^j\omega)$  de  $\bar{\phi}_j(x)$  en su mayoría no es despreciable en  $[-2^{-j}\pi, 2^{-j}\pi]$ . Por lo tanto, la aproximación discreta  $\alpha_{j,n}$  es un filtro pasa-bajas de  $f$  muestreado a intervalos  $2^j$ .

El siguiente teorema de Mallat-Meyer proporciona condiciones necesarias y suficientes sobre  $\hat{h}(\omega)$  las cuales garantizan que el producto infinito (5.16) es la transformada de Fourier de la función de escalamiento.

**Teorema 5.7.** *Sea  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  una función de escalamiento integrable. La serie de Fourier  $h_n \langle 2^{-1/2}\phi(t/2), \phi(t-n) \rangle$  satisface*

$$(5.30) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2$$

y

$$(5.31) \quad \hat{h}(0) = \sqrt{2}$$

Por otro lado, si  $\hat{h}(\omega)$  es  $2\pi$  periódica y continuamente diferenciable en una vecindad de  $\omega = 0$ , si esta satisface (5.30) y (5.31) sí y solo si

$$(5.32) \quad \inf_{\omega \in [-\pi/2, \pi/2]} |\hat{h}(\omega)| > 0$$

entonces

$$(5.33) \quad \hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}}$$

es la transformada de Fourier una función de escalamiento  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* 1. Vamos a partir del hecho de que  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal. De la relación (5.26) en el dominio de Fourier, tenemos la siguiente condición equivalente

$$(5.34) \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1.$$

Sustituyendo  $\hat{\phi}(\omega) = 2^{-1/2}\hat{h}(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$  obtenemos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{h}(\frac{\omega}{2} + k\pi)|^2 |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + k\pi)|^2 = 2.$$

Como  $\hat{h}(\omega)$  es  $2\pi$  periódica, separando los términos pares y los términos nones como sigue

$$|\hat{h}(\frac{\omega}{2})|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + 2p\pi)|^2 + |\hat{h}(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + \pi + 2p\pi)|^2 = 2.$$

Sustituyendo en (5.34)  $\omega' = \omega/2$  y  $\omega' = \omega/2 + \pi$  probamos que

$$|\hat{h}(\omega')|^2 + |\hat{h}(\omega' + \pi)|^2 = 2.$$

2. Ya probamos que  $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$  mostrando que  $\hat{\phi}(0) \neq 0$ . En efecto, sabemos que  $\hat{\phi}(0) = 2^{-1/2}\hat{h}(0)\hat{\phi}(0)$ . Verifiquemos entonces que  $|\hat{\phi}(0)| = 1$  es una consecuencia de la propiedad de completos (5) de una aproximación multirresolución.

La proyección ortogonal de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  es

$$(5.35) \quad P_{V_j} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n}.$$

La propiedad (5) se puede expresar en el tiempo y dominio de Fourier, así la formula de Plancherel implica que

$$(5.36) \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} \|f - P_{V_j}\|^2 = \lim_{j \rightarrow -\infty} 2\pi \|\hat{f} - \hat{P}_{V_j}\|^2 = 0$$

Para calcular la transformada de Fourier  $\hat{P}_{V_j}(\omega)$ , denotemos  $\phi_j(x) = \sqrt{2^{-j}}\phi(2^{-j}x)$ . Sustituyendo la expresión (5.29) en (5.35) obtenemos

$$P_{V_j} f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f * \bar{\phi}_j(2^j n) \phi_j(x - 2^j n) = \phi_j * \sum_{k \in \mathbb{Z}} f * \bar{\phi}_j(2^j k) \delta(x - 2^j - k).$$

La transformada de Fourier de  $f * \bar{\phi}_j(x)$  es  $\sqrt{2^j} \hat{f}(\omega) \hat{\phi}^*(2^j \omega)$ . Un muestreo uniforme tiene una transformada de Fourier periódica dada por (2.16), así

$$(5.37) \quad \hat{P}_{V_j}(\omega) = \hat{\phi}(2^j \omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(w - \frac{2k\pi}{2^j}) \hat{\phi}^*(2^j [w - \frac{2k\pi}{2^j}]).$$

Tomemos  $\hat{f} = \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]}$ . Para  $j < 0$  y  $\omega \in [-\pi, \pi]$ , la expresión (5.37) da  $\hat{P}_{V_j}(\omega) = |\hat{\phi}(2^j \omega)|^2$ . La convergencia del promedio al cuadrado (5.36) implica que

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - |\hat{\phi}(2^j \omega)|^2|^2 d\omega = 0.$$

Como  $\phi$  es integrable,  $\hat{\phi}(\omega)$  es continua y así  $\lim_{j \rightarrow -\infty} |\hat{\phi}(2^j \omega)| = |\hat{\phi}(0)| = 1$ .

3. Observemos que el producto infinito (5.33) converge además de que  $|\hat{\phi}(\omega)| \leq 1$  ya que (5.30) implica que  $|\hat{h}(\omega)| \leq 2$ . La fórmula de Parseval nos dice que

$$\langle \phi(x), \phi(x-k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi^*(x-k) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega.$$

Verificar que  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal es equivalente a mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega = 2\pi \delta_k.$$

Este resultado se obtiene considerando las funciones

$$\hat{\phi}_n(\omega) = \prod_{p=1}^n \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_{[-2^n\pi, 2^n\pi]}(\omega),$$

y calculando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  de las integrales

$$I_{n,k} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_n(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega = \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} \prod_{p=1}^n \frac{|\hat{h}(2^{-p}\omega)|}{2} e^{ik\omega} d\omega.$$

Primero mostraremos que  $I_{n,k} = 2\pi \delta_k$  para toda  $n \geq 1$ . Para esto, separamos  $I_{n,k}$  en dos integrales como sigue:

$$I_{n,k} = \int_{-2^n\pi}^0 \prod_{p=1}^n \frac{|\hat{h}(2^{-p}\omega)|}{2} e^{ik\omega} d\omega + \int_0^{2^n\pi} \prod_{p=1}^n \frac{|\hat{h}(2^{-p}\omega)|}{2} e^{ik\omega} d\omega.$$

Aplicamos el siguiente cambio de variable  $\omega' = \omega + 2^n\pi$  en la primera integral. Como  $\hat{h}(\omega)$  es  $2\pi$  periódica, cuando  $p < n$  entonces  $|\hat{h}(2^{-p}[\omega' - 2^k\pi])|^2 = |\hat{h}(2^{-p}\omega')|^2$ . Si  $n = p$  la hipótesis (5.30) implica que

$$|\hat{h}(2^{-n}[\omega' - 2^k\pi])|^2 + |\hat{h}(2^{-k}\omega')|^2 = 2.$$

Para  $n > 1$ , las dos integrales de  $I_{k,n}$  resultan

$$(5.38) \quad I_{n,k} = \int_0^{2^n\pi} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{|\hat{h}(2^{-p}\omega)|}{2} e^{ik\omega} d\omega.$$

Como  $\prod_{p=1}^{n-1} |\hat{h}(2^{-p}\omega)|^2 e^{ik\omega}$  es  $2\pi$  periódico, entonces  $I_{n,k} = I_{n-1,k}$  y por inducción  $I_{n,k} = I_{1,k}$ . Sustituyendo  $n = 1$  en (5.38) obtenemos

$$I_{1,k} = \int_0^{2\pi} e^{ik\omega} = 2\pi\delta_k,$$

lo cual verifica que  $I_{n,k} = 2\pi\delta_k$ , para toda  $n \geq 1$ .

Ahora probaremos que  $\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ . Para toda  $\omega \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{\phi}_n(\omega)|^2 = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{|\hat{h}(2^{-p}(\omega))|^2}{2} = |\hat{\phi}(\omega)|^2.$$

El lema de Fatou sobre funciones positivas prueba que

$$(5.39) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_n(\omega)|^2 d\omega = 2\pi$$

porque  $I_{0,k} = 2\pi$  para toda  $k \geq 1$ . Como

$$|\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{\phi}_n(\omega)|^2 e^{ik\omega},$$

entonces

$$(5.40) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_n(\omega)|^2 d\omega = d\pi\delta_k$$

aplicando el teorema de convergencia dominada [5]. También se requiere verificar la condición de la cota superior, es decir, mostrar la existencia de una constante  $C$  tal que

$$(5.41) \quad ||\phi_n(\omega)|^2 e^{ik\omega}| = |\hat{\phi}_n(\omega)|^2 \leq C|\hat{\phi}(\omega)|^2.$$

En efecto, ya mostramos en (5.39) que  $|\phi_n(\omega)|^2$  es una función integrable.

La existencia de  $C > 0$  que satisface (5.41) para  $|\omega| > 2^k\pi$  se sigue de que  $\hat{\phi}(\omega) = 0$ . Para  $|\omega| \leq 2^k\pi$  sabemos que  $\hat{\phi}(\omega) = 2^{-1/2}\hat{h}(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$ , entonces

$$|\hat{\phi}(\omega)|^2 = |\hat{\phi}_k(\omega)|^2 |\hat{\phi}(2^{-k}\omega)|^2.$$

Para probar (5.41) para  $|\omega| \leq 2^n\pi$ , es suficiente mostrar que  $|\hat{\phi}(\omega)|^2 \geq 1/C$  para  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Consideremos la vecindad de  $\omega = 0$ . Como  $\hat{h}(\omega) \leq 2 = |\hat{h}(0)|^2$ , entonces las funciones  $|\hat{h}(\omega)|^2$  y  $\log_e |\hat{h}(\omega)|^2$  tienen derivadas que se reflejan en  $\omega = 0$ . De aquí se sigue que existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$\forall |\epsilon| \leq 0, 0 \geq \log_e \left( \frac{|\hat{h}(\omega)|^2}{2} \right) \geq -|\omega|.$$

Por lo tanto,

$$(5.42) \quad |\hat{h}(\omega)|^2 = \exp \left[ \sum_{p=1}^{\infty} \log_e \left( \frac{|\hat{h}(2^{-p}\omega)|^2}{2} \right) \right] \geq e^{-|\omega|} \geq e^{-\epsilon}.$$

Ahora consideremos cuando  $|\omega| > \epsilon$ , tomando un entero  $l$  tal que  $2^{-l}\pi < \epsilon$ . La condición (5.32) muestra que  $K = \inf_{\omega \in [-\pi/2, \pi/2]} |\hat{h}(\omega)| > 0$ , así que cuando  $|\omega| \geq \pi$

$$|\hat{\phi}(\omega)|^2 = \prod_{p=1}^l \frac{|\hat{h}(2^{-p}\omega)|^2}{2} |\hat{\phi}(2^{-l}\omega)|^2 \geq \frac{K^{2l}}{2^l} e^{-\epsilon} = \frac{1}{C}.$$

Aplicando el teorema de convergencia dominada se prueba (5.40), por lo cual  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal. Mediante un cambio de variable se muestra que  $\{\phi_{j,n}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal para toda  $j \in \mathbb{Z}$ .

4. Para verificar que  $\phi$  es una función de escalamiento, debemos mostrar que los espacios  $V_j$  generados por  $\{\phi_{j,n}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  definen una aproximación multirresolución. Para verificar que  $V_{j+1} \subset V_j$  debemos mostrar que para alguna  $p \in \mathbb{Z}$

$$\phi_{j+1,p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{j,n} \phi_{j,n}.$$

Esta igualdad se prueba utilizando la descomposición de Mallat. Como todos los vectores de una base para  $V_{j+1}$  se pueden descomponer en una base de  $V_j$  se sigue que  $V_{j+1} \subset V_j$ .

Ahora debemos probar que para alguna  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se cumple que

$$(5.43) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|P_{V_j}\| = 0.$$

Como  $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_j$

$$\|P_{V_j} f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_{j,n} \rangle|^2.$$

Primero supongamos que  $f$  está acotada por  $A$  y que tiene soporte compacto incluido en  $[-2^J, 2^J]$ . Las constantes  $A$  y  $J$  pueden ser arbitrariamente grandes. Se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_{j,n} \rangle|^2 &\leq 2^{-j} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-2^J}^{2^J} |f(t)| |\phi(2^{-j}x - k)| dx \right]^2 \\ &\leq 2^{-j} A^2 \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-2^J}^{2^J} |\phi(2^{-j}x - k)| dx \right]^2 \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz a  $1 \times |\phi(2^{-j}x - k)|$  tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_{j,n} \rangle|^2 &\leq A^2 2^{J+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-2^J}^{2^J} |\phi(2^{-j}x - k)|^2 2^{-j} dx \\ &\leq A^2 2^{J+1} \int_{S_j} |\phi(x)|^2 dx = A^2 2^{J+1} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 \mathbf{1}_{S_j}(x) dx, \end{aligned}$$

con  $S_j = \cup_{n \in \mathbb{Z}} [n - 2^{J-j}, n + 2^{J-j}]$  para  $j > J$ . Si  $x \notin \mathbb{Z}$  entonces  $\mathbf{1}_{S_j}(x) \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow +\infty$ . El teorema de convergencia dominada [5] aplicado a  $|\phi(x)|^2 \mathbf{1}_{S_j}(x)$  prueba que la integral converge a 0 y por lo tanto

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_{j,n} \rangle|^2 = 0.$$

La propiedad (5.43) se extiende para alguna  $f \in L^2(\mathbb{R})$  usando la densidad en  $L^2(\mathbb{R})$  de una función acotada con soporte compacto y la propiedad de un subespacio denso.

Para probar la propiedad multirresolución 5, debemos mostrar que para alguna  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$(5.44) \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} \|f - P_{V_j} f\|^2 = \lim_{j \rightarrow -\infty} (\|f\|^2 \|P_{V_j}\|^2) = 0.$$

Consideremos funciones  $f$  cuya transformada de Fourier  $\hat{f}$  tiene soporte compacto incluido in  $[-2^J \pi, 2^J \pi]$  para  $J$  suficientemente grande. Ya probamos en (5.37) que la transformada de Fourier de  $P_{V_j} f$  es

$$P_{V_j} \hat{f}(\omega) = \hat{\phi}(2^j \omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - 2^{-j} 2k\pi) \hat{\phi}^*(2^j [\omega - 2^{-j} 2k\pi]).$$

Si  $j < -J$ , entonces los soportes de  $\hat{f}(\omega - 2^{-j}2k\pi)$  son disjuntos para distintas  $k$  así que

$$(5.45) \quad \|P_{V_j} f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 |\hat{f}(2^j \omega)|^4 d\omega \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} |\hat{f}(\omega - 2^{-j}2k\pi)|^2 |\hat{\phi}(2^j \omega)|^2 |\hat{\phi}(2^j[\omega - 2^{-j}2k\pi])|^2 d\omega.$$

Ya hemos visto que  $|\phi(\omega)| \leq 1$  y (5.42) prueban que para  $\omega$  suficientemente pequeña  $|\phi(\omega)| \geq e^{-|\omega|}$  así que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\hat{\phi}(\omega)| = 1.$$

Siempre que  $|\hat{f}(\omega)|^2 |\hat{\phi}(2^j \omega)|^4 \leq |\hat{f}(\omega)|^2$  y  $\lim_{j \rightarrow -\infty} |\hat{\phi}(2^j \omega)|^4 |\hat{f}(\omega)|^2 = |\hat{f}(\omega)|^2$  podemos aplicar el teorema de convergencia dominada [5], para probar que

$$(5.46) \quad \lim_{j \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 |\hat{\phi}(2^j \omega)|^4 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \|f\|^2.$$

El operador  $P_{V_j}$  es una proyección ortogonal, así  $\|P_{V_j}\| \leq \|f\|$ . Las expresiones (5.45) y (5.46) implican que  $\lim_{j \rightarrow -\infty} (\|f\|^2 - \|P_{V_j} f\|^2) = 0$ , por lo tanto se cumple (5.44).  $\square$

Las wavelets ortonormales llevan consigo los “detalles” necesarios para incrementar la resolución de la aproximación de una señal. Las aproximaciones de  $f$  a las escalas  $2^j$  y  $2^{j+1}$  son iguales respectivamente a sus proyecciones ortogonales sobre  $V_j$  y  $V_{j+1}$ , además de que  $V_j \subset V_{j-1}$ . Sea  $W_j$  el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j-1}$

$$(5.47) \quad V_{j-1} = V_j \oplus W_j.$$

La proyección ortogonal de  $f$  sobre  $V_{j-1}$  puede entonces descomponerse como la suma de las proyecciones ortogonales sobre  $V_j$  y  $W_j$ :

$$(5.48) \quad P_{V_{j-1}} f = P_{V_j} f + P_{W_j} f.$$

El complemento  $P_{W_j} f$  proporciona los detalles de  $f$  que aparecen a la escala  $2^{j-1}$  y desaparecen a la escala mayor  $2^j$ . El siguiente teorema muestra como puede construirse una base ortonormal de  $W_j$  mediante escalamientos y traslaciones de una wavelet  $\psi$ .

**Teorema 5.8.** *Sea  $\phi$  una función de escalamiento y  $h$  su correspondiente filtro espejo conjugado. Sea  $\psi$  la función cuya transformada de Fourier es*

$$(5.49) \quad \hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

con

$$(5.50) \quad \hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi).$$

Denotemos

$$\psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right).$$

Para cualquier escala  $2^j$ ,  $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $W_j$ . Para todas las escalas,  $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$  es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* Como  $\psi(x/2) \in W_1 \subset V_0$ , entonces puede descomponerse en  $\{\phi(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  que es una base ortogonal de  $V_0$ :

$$(5.51) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \phi(x-n),$$

en donde

$$(5.52) \quad g_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi\left(\frac{x}{2}\right), \phi(x-n) \rangle.$$

De la transformada de Fourier de (5.51) obtenemos

$$\hat{\psi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega) \hat{\phi}(\omega). \quad \square(5.53)$$

El siguiente lema proporciona las condiciones necesaria y suficiente sobre  $\hat{g}$  para diseñar una wavelet ortogonal.

**Lema 5.9.** La familia  $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $W_j$  si y solo si

$$(5.54) \quad |\hat{g}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega + \pi)|^2 = 2$$

y

$$(5.55) \quad \hat{g}(\omega) \hat{h}^*(\omega) + \hat{g}(\omega + \pi) \hat{h}^*(\omega + \pi) = 0.$$

De (5.26) sabemos que  $\{\psi(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal si y solo si

$$(5.56) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, I(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$



Como  $\hat{\psi}(\omega) = 2^{-1/2}\hat{g}(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$  y  $g(\omega)$  es  $2\pi$  periódica,

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\frac{\omega}{2} + k\pi)|^2 |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + k\pi)|^2 \\ &= |\hat{g}(\omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + 2p\pi)|^2 + |\hat{g}(\frac{\omega}{2} + k\pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + \pi + 2p\pi)|^2 \end{aligned}$$

Sabemos que  $\sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega + 2p\pi)|^2 = 1$  así que (5.56) es equivalente a (5.54).

El espacio  $W_0$  es ortogonal a  $V_0$  si y solo si  $\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  y  $\{\psi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  son familias ortogonales de vectores, es decir, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$

$$\langle \psi(x), \phi(x - n) \rangle = \psi * \bar{\psi}(n) = 0.$$

La transformada de Fourier de  $\psi * \bar{\phi}(x)$  es  $\hat{\psi}(\omega)\hat{\phi}^*(\omega)$ . La sucesión muestreada  $\psi * \bar{\phi}(n)$  es cero si su serie de Fourier satisface

$$(5.57) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega + 2k\pi)\hat{\phi}^*(\omega + 2k\pi) = 0.$$

Sustituyendo  $\hat{\psi}(\omega) = 2^{-1/2}\hat{g}(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$  y  $\hat{\phi}(\omega) = 2^{-1/2}\hat{h}(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$  en esta ecuación, siempre que  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$ , (5.57) es equivalente a (5.55).

Finalmente debemos verificar que  $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$ . Sabemos que  $\{\sqrt{2}\phi(2x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortogonal de  $V_{-1}$ , esto es equivalente a mostrar que para cualquier  $a_n \in l^2(\mathbb{Z})$  existe  $b_n \in l^2(\mathbb{Z})$  y  $c_n \in l^2(\mathbb{Z})$  tales que

$$(5.58) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \sqrt{2}\phi(2(x - 2^{-1}n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \phi(x - n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi(x - n).$$

La transformada de Fourier de (5.58) produce

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = \hat{b}(\omega)\hat{\phi}(\omega) + \hat{c}(\omega)\hat{\psi}(\omega).$$

Sustituyendo  $\hat{\psi}(\omega) = 2^{-1/2}\hat{g}(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$  y  $\hat{\phi}(\omega) = 2^{-1/2}\hat{h}(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$  en esta ecuación mostramos que esto necesariamente se cumple sí

$$(5.59) \quad \hat{a}(\frac{\omega}{2}) = \hat{b}\hat{h}(\frac{\omega}{2}) + \hat{c}(\omega)\hat{g}(\frac{\omega}{2}).$$

Definamos

$$\hat{b}(2\omega) = \frac{1}{2}[\hat{a}(\omega)\hat{h}^*(\omega) + \hat{a}(\omega + \pi)\hat{h}^*(\omega + \pi)]$$

y

$$\hat{c}(2\omega) = \frac{1}{2}[\hat{a}(\omega)\hat{g}^*(\omega) + \hat{a}(\omega + \pi)\hat{g}^*(\omega + \pi)].$$

Calculando el lado derecho de la ecuación (5.59) verificamos que es igual al lado izquierdo si sustituimos (5.54), (5.55) y usando

$$(5.60) \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2.$$

Como  $\hat{b}$  y  $\hat{c}$  son  $2\pi$  periódicas, entonces son las series de Fourier de  $b_n$  y  $c_n$  que satisfacen (5.58). Esto concluye la prueba del lema.

La expresión  $\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega}\hat{h}^*(\omega + \pi)$  satisface (5.54) y (5.55). Por lo tanto, del lema anterior concluimos que  $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortogonal de  $W_j$ .

Para completar la prueba de teorema, solo falta verificar que  $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortogonal de  $L^2(\mathbb{R})$ . Los espacios del detalle  $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  son ortogonales, entonces  $W_j$  es ortogonal a  $V_j$  y  $W_l \subset V_{l-1} \subset V_l$  para  $j < l$ . Por lo tanto,  $W_j$  y  $W_l$  son ortogonales y podemos hacer la siguiente descomposición

$$(5.61) \quad L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j.$$

En efecto,  $V_{j-1} = W_j \oplus V_j$  puede verificarse sustituyendo para cualquier  $L > j$

$$(5.62) \quad V_L = \bigoplus_{j=L-1}^J W_j \oplus V_J.$$

Siempre que  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  es una aproximación multirresolución,  $V_L$  y  $V_J$  tienden respectivamente a  $L^2(\mathbb{R})$  y a  $\{0\}$  cuando  $L$  y  $J$  se van respectivamente a  $-\infty$  y a  $\infty$ , lo cual implica (5.61). La unión de bases ortonormales de todas las  $W_j$  es por lo tanto una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ .  $\square$

# Capítulo 6

## Superresolución

Dentro del procesamiento digital de imágenes hay un problema que consiste en tratar de mejorar y ampliar una imagen, tanto en tamaño como en resolución, esto concierne a la llamada *superresolución*, pero hay dos casos: uno es cuando solamente se tiene una imagen o muestra, y el otro cuando se tienen dos o más imágenes. Cuando se tiene una única muestra, el problema consiste en adivinar como tiene que ser un pixel generado a partir de dos existentes en la imagen original. Al primer caso, se le conoce como *superresolución de cuadro único* o SFSR por sus siglas en inglés (single frame super-resolution), por ejemplo, cuando se quiere ampliar una imagen obtenida con un teléfono celular viejo, los cuales generan una imagen en formato .JPG de  $352 \times 250$  que son las líneas de resolución que ofrece la televisión analógica. Al segundo caso, se le llama *superresolución de cuadros múltiples* o MFSR por sus siglas en inglés (multiple frame super-resolution), por ejemplo, las imágenes de los satélites. El primer trabajo sobre super resolución fue publicado en 1984 [20] y el término “superresolución” apareció en 1990 [10].

### 6.1. Resolución de una imagen

La resolución de una imagen puede definirse como lo perceptible más pequeño o el detalle medible en una presentación visual. Los investigadores en procesamiento digital de imágenes y visión computacional clasifican la resolución en tres tipos diferentes

- resolución espacial: esta se refiere al espaciamiento entre pixeles en una imagen y se mide en elementos de imagen o pixeles, por sus siglas en inglés (picture element), por unidad de longitud. A mayor resolución espacial, hay más pixeles en una imagen. Por

ejemplo, en una impresora láser, la resolución se mide en puntos por pulgada DPI por sus siglas en ingles (dots per inch).

- resolución del brillo: también se le conoce como *escala de grises*, el cual se refiere al numero de niveles de brillo o escala de grises usada para representar un pixel. Comúnmente, en una imagen cuantizada se utilizan 256 niveles donde cada nivel esta representado por 8 bits, por ejemplo, un ultrasonido o una tomografía.
- resolución temporal: esta representa la tasa de cuadros o el número de cuadros capturados por segundo. Entre más grande es la resolución temporal, es menor el parpadeo que se observa. Por ejemplo, en las primeras películas de cine mudas, si se observa con mucha atención, puede verse como “salta” la película de un cuadro a otro. Actualmente, en formatos de video digital como el MPG o DIVX, la resolución temporal es de 25 cuadros por segundo o más.

## 6.2. Reconstrucción de una superresolución usando estimación con wavelet de Haar

Este trabajo está basado en [19]. En la reconstrucción de una imagen de alta resolución, suponemos que en las imágenes de baja resolución hay desplazamientos de subpíxeles entre ellas; estos desplazamientos serán utilizados para restaurar la imagen de alta resolución. Supongamos que tenemos  $q^2$  imágenes de  $M \times M$  píxeles en escala de grises, con  $q$  el factor entero de amplificación, entonces generamos las imágenes de baja resolución desplazando  $l_1$  píxeles hacia abajo y  $l_2$  píxeles hacia la derecha la imagen de baja resolución  $I$ . Para  $q = 2$ , las imágenes de baja resolución serán  $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$  y los píxeles en las imágenes de baja resolución serán el promedio de  $h_{l_1, l_2} \times w_{l_1, l_2}$  donde  $0 \leq l_1, l_2 \leq 1$ . La relación de píxeles entre las imágenes de baja resolución y la imagen de alta resolución, que denotaremos por  $f$ , está dada por

$$(6.1) \quad (I_{l_1 l_2})_{ij} = \sum_{x \in X_{l_1}, y \in Y_{l_2}} \frac{f(x, y)}{h_{l_1 l_2} w_{l_1 l_2}}, \quad 1 \leq i, j \leq M,$$

donde  $X_{l_1} = \{2i - 1 + l + l_1 | k = 0, \dots, h_{l_1 l_2} - 1\}$ ,  $Y_{l_2} = \{2j - 1 + k + l_2 | k = 0, \dots, w_{l_1 l_2} - 1\}$ .

En este trabajo, mantendremos fija  $q = 2$ , entonces los píxeles en la imagen de baja resolución son el promedio de  $2 \times 2$  píxeles en la imagen de alta resolución; finalmente para reconstruir la imagen de alta resolución de  $qM \times qM$  utilizaremos la transformada wavelet inversa bidimensional de Haar, estimando la subbanda aproximada ( $LL$ ), la subbanda

horizontal ( $H$ ), la subbanda vertical ( $V$ ) y la subbanda diagonal ( $D$ ). Estas subbandas son submuestreos de la imagen de alta resolución. La relación de pixeles entre la subbanda aproximada ( $LL$ ) y la imagen de alta resolución está dada por

$$(6.2) \quad (LL)_{ij} = \sum_{x \in X_{LL}, y \in Y_{LL}} \frac{f(x, y)}{2}$$

donde  $X_{LL} = \{2i - 1 + k | k = 0, 1\}$  y  $Y_{LL} = \{2j - 1 + k | k = 0, 1\}$ .

Los coeficientes de la subbanda horizontal ( $H$ ) son

$$(6.3) \quad (H)_{ij} = \frac{1}{2} \left( \sum_{x \in X_{H_a}, y \in Y_{H_a}} f(x, y) - \sum_{x \in X_{H_b}, y \in Y_{H_b}} f(x, y) \right)$$

donde  $X_{H_a} = \{2i - 1\}$ ,  $Y_{H_a} = \{2j - 1 + k | k = 0, 1\}$ ,  $X_{H_b} = \{2i\}$  y  $Y_{H_b} = \{2j - 1 + k | k = 0, 1\}$ .

Análogamente, los coeficientes de la subbanda vertical ( $V$ ) son

$$(6.4) \quad (V)_{ij} = \frac{1}{2} \left( \sum_{x \in X_{V_a}, y \in Y_{V_a}} f(x, y) - \sum_{x \in X_{V_b}, y \in Y_{V_b}} f(x, y) \right)$$

en donde  $X_{V_a} = \{2j - 1 + k | k = 0, 1\}$ ,  $Y_{V_a} = \{2i - 1\}$ ,  $X_{V_b} = \{2j - 1 + k | k = 0, 1\}$  y  $Y_{V_b} = \{2j\}$ . Finalmente utilizaremos series de Taylor para aproximar estas subbandas.

### 6.3. Aproximación de primer orden

Sustituyendo  $q = 2$ ,  $l_1 = l_2 = 0$  y  $h_{00} = w_{00} = 2$  en la ecuación (6.1) obtenemos  $X_0 = \{2i - 1 + k | k = 0, 1\} = X_{LL}$  y  $Y_0 = \{2j - 1 + k | k = 0, 1\} = Y_{LL}$ , entonces

$$(I_{00})_{ij} = \sum_{x \in X_0, y \in Y_0} \frac{f(x, y)}{4},$$

por otro lado

$$2(I_{00})_{ij} = 2 \sum_{x \in X_0, y \in Y_0} \frac{f(x, y)}{4} = \sum_{x \in X_0, y \in Y_0} \frac{f(x, y)}{2} = (LL)_{ij},$$

por lo tanto

$$2(I_{00})_{ij} = (LL)_{ij}.$$

La subbanda aproximada puede interpolarse a partir de la imagen de baja resolución  $I_{00}$ . Para aproximar la subbanda horizontal, utilizaremos un desarrollo en series de Taylor de primer orden para la imagen de alta resolución, el cual estará dado por

$$(6.5) \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \Delta x f_x(x, y) + \Delta y f_y(x, y),$$

Si desarrollamos explícitamente la ecuación (6.3), tenemos que

$$(6.6) \quad (H)_{ij} = \frac{f(2i-1, 2j-1) - f(2i, 2j-1)}{2} + \frac{f(2i-1, 2j) - f(2i, 2j)}{2}$$

Ahora aproximaremos a la derivada  $f_x$  haciendo el cambio de variable  $x = 2i-1$  e  $y = 2j-1$ , sustituyendo en la expresión anterior obtenemos

$$(H)_{ij} = \frac{f(x, y) - f(x+1, y)}{2} + \frac{f(x, y+1) - f(x+1, y+1)}{2},$$

sustituyendo  $\Delta x = 1$  y  $\Delta y = 0$  en (6.5), obtenemos

$$f(x+1, y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x+1, y) &\approx f(x, y) - [f(x, y) + f_x(x, y)] \\ &= -f_x(x, y), \end{aligned}$$

del mismo modo, sustituyendo  $\Delta x = 2$  y  $\Delta y = 0$  en (6.5),

$$f(x, y) - f(x+2, y) \approx -2f_x(x, y)$$

entonces

$$(6.7) \quad \frac{f(x, y) - f(x+2, y)}{2} = -f_x(x, y),$$

por lo tanto

$$f(x, y) - f(x+1, y) \approx \frac{f(x, y) - f(x+2, y)}{2},$$

regresando a la variable original:

$$(6.8) \quad f(2i-1, 2j-1) - f(2i, 2j-1) \approx \frac{f(2i-1, 2j-1) - f(2i+1, 2j-1)}{2}.$$

Por otro lado, sustituyendo  $2k = 2j - 1$  en la ecuación (6.8), tenemos que

$$f(2i-1, 2k) - f(2i, 2k) \approx \frac{f(2i-1, 2k) - f(2i+1, 2k)}{2}$$

entonces

$$(6.9) \quad f(2i-1, 2j) - f(2i, 2j) \approx \frac{f(2i-1, 2j) - f(2i+1, 2j)}{2}.$$

Finalmente sustituimos (6.8) y (6.9) en la expresión (6.3) para conocer  $H$ :

$$(6.10) \quad (H)_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{f(2i-1, 2j-1) - f(2i-1, 2j)}{2} + \frac{f(2i-1, 2j) - f(2i+1, 2j)}{2} \right].$$

Ahora vamos a calcular  $I_{00}$  e  $I_{10}$  para después ver como están relacionados con  $H$ . A partir de la expresión (6.1) y como  $X_1 = \{2i-1+k+1 | k=0, 1\}$  e  $Y_0 = \{2j-1+k | k=0, 1\}$ , entonces

$$\begin{aligned} (I_{10})_{ij} &= \frac{1}{4} \sum_{x \in X_1, y \in Y_0} f(x, y) \\ &= \frac{1}{4} \left[ f(2i, 2j-1) + f(2i, 2j) + f(2i+1, 2j-1) + f(2i+1, 2j) \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (I_{00}) - (I_{10}) &= \frac{1}{4} \left[ f(2i-1, 2j-1) + f(2i, 2j-1) + f(2i-1, 2j) + f(2i, 2j) \right. \\ &\quad \left. - f(2i+1, 2j-1) - f(2i, 2j-1) - f(2i+1, 2j) - f(2i, 2j) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ f(2i-1, 2j-1) + f(2i-1, 2j) - f(2i+1, 2j-1) - f(2i+1, 2j) \right], \end{aligned}$$

si comparamos esta ultima expresión con la relación (6.10), obtenemos que

$$(H)_{ij} = (I_{00})_{ij} - (I_{10})_{ij}.$$

A continuación vamos a calcular  $V$  para también determinar como esta relacionada con  $I_{00}$  e  $I_{10}$ . Si desarrollamos (6.4) explícitamente, obtenemos

$$(6.11) \quad (V)_{ij} = \frac{f(2i-1, 2j-1) - f(2i-1, 2j)}{2} + \frac{f(2i, 2j-1) - f(2i, 2j)}{2}.$$

Ahora aproximaremos la derivada  $f_y$  utilizando los mismos cambios de variable de  $x$  e  $y$ , del cual obtenemos

$$(V)_{ij} = \frac{f(x, y) - f(x, y+1)}{2} + \frac{f(x+1, y) - f(x+1, y+1)}{2},$$

ahora sustituimos  $\Delta x = 0$  y  $\Delta y = 1$  en la expresión (6.5), tenemos que

$$f(x, y+1) \approx f(x, y) + f_y(x, y),$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x, y+1) &\approx f(x, y) - [f(x, y) + f_y(x, y)] \\ &= -f_y(x, y) \end{aligned}$$

del mismo modo, ahora sustituimos  $\Delta x = 0$  y  $\Delta y = 2$  en la expresión (6.5):

$$f(x, y) - f(x, y+2) \approx -2f_y(x, y),$$

entonces

$$(6.12) \quad \frac{f(x, y) - f(x, y+2)}{2} = -f_y(x, y),$$

por lo tanto

$$f(x, y) - f(x, y+1) \approx \frac{f(x, y) - f(x, y+2)}{2},$$

nuevamente, cuando regresamos a la variable original obtenemos

$$(6.13) \quad f(2i-1, 2j-1) - f(2i-1, 2j) \approx \frac{f(2i-1, 2j-1) - f(2i-1, 2j+1)}{2}.$$

Ahora sustituimos  $2k = 2i - 1$  en la expresión (6.13), así

$$f(2k, 2j-1) - f(2k+1, 2j) \approx \frac{f(2k, 2j-1) - f(2k, 2j+1)}{2},$$



entonces

$$(6.14) \quad f(2i, 2j - 1) - f(2i, 2j) \approx \frac{f(2i, 2j - 1) - f(2i, 2j + 1)}{2},$$

sustituyendo (6.13) y (6.14) en la expresión (6.4) obtenemos  $V$ :

$$(6.15) \quad (V)_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{f(2i - 1, 2j - 1) - f(2i, 2j - 1)}{2} + \frac{f(2i, 2j - 1) - f(2i, 2j + 1)}{2} \right].$$

A continuación, calcularemos  $I_{01}$  para encontrar como esta relacionada con  $V$ . A partir de la expresión (6.4) y como  $X_0 = \{2i - 1 + k | k = 0, 1\}$  e  $Y_1 = \{2j - 1 + k + 1 | k = 0, 1\}$ , entonces

$$\begin{aligned} (I_{01})_{ij} &= \frac{1}{4} \sum_{x \in X_0, y \in Y_1} f(x, y) \\ &= \frac{1}{4} \left[ f(2i - 1, 2j) + f(2i - 1, 2j + 1) + f(2i, 2j) + f(2i, 2j + 1) \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (I_{00}) - (I_{01}) &= \frac{1}{4} \left[ f(2i - 1, 2j - 1) + f(2i, 2j - 1) + f(2i - 1, 2j) + f(2i, 2j) \right. \\ &\quad \left. - f(2i - 1, 2j) - f(2i - 1, 2j + 1) - f(2i, 2j) - f(2i, 2j + 1) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ f(2i - 1, 2j - 1) + f(2i, 2j - 1) - f(2i - 1, 2j + 1) - f(2i, 2j + 1) \right] \end{aligned}$$

por lo tanto

$$(V)_{ij} = (I_{00})_{ij} - (I_{01})_{ij}.$$

Ahora calcularemos  $D$ . Como el método consistió en desplazar un pixel hacia abajo y luego un pixel a la derecha, es decir, no hubo desplazamiento en diagonal, entonces este ultimo lo aproximaremos como la diferencia en el desplazamiento vertical mas la diferencia en el desplazamiento horizontal, es decir

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ f(2i - 1, 2j - 1) - f(2i - 1, 2j) + f(2i, 2j) - f(2i - 1, 2j) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ f(2i - 1, 2j - 1) + f(2i, 2j) \right] - \frac{1}{2} \left[ f(2i - 1, 2j) + f(2i - 1, 2j) \right], \end{aligned}$$

ahora substituyendo  $x = 2i - 1$  e  $y = 2j - 1$  en (6.5) obtenemos

$$\begin{aligned} f(x + 1, y) &\approx f(x, y) + f_x(x, y) \\ f(x, y + 1) &\approx f(x, y) + f_y(x, y) \end{aligned}$$

si sumamos estas dos ultimas expresiones:

$$f(x + 1, y) + f(x, y + 1) \approx f(x, y) + [f(x, y) + f_x(x, y) + f_y(x, y)],$$

entonces

$$f(x, y) + f(x + 1, y + 1) = f(x + 1, y) + f(x, y + 1),$$

luego

$$f(2i - 1, 2j - 1) + f(2i, 2j) = f(2i, 2j - 1) + f(2i - 1, 2j)$$

es decir,

$$f(2i - 1, 2j - 1) + f(2i, 2j) - \left[ f(2i, 2j - 1) + f(2i - 1, 2j) \right] = 0,$$

por lo tanto

$$D = 0.$$

En resumen, para la aproximación a primer orden tenemos que

$$\begin{aligned} (LL)ij &= 2(I_{00})ij, \\ (H)ij &\approx (I_{00})ij - (I_{10})ij, \\ (V)ij &\approx (I_{00})ij - (I_{01})ij, \\ (D)ij &\approx 0. \end{aligned}$$

mientras que para segundo orden

$$\begin{aligned} (LL)ij &= 2(I_{00})ij, \\ (H)ij &\approx \frac{3}{2}((I_{00})ij - (I_{10})ij) - \frac{1}{2}((I_{10})ij - (I_{00})i + 1, j), \\ (V)ij &\approx \frac{3}{2}((I_{00})ij - (I_{01})ij) - \frac{1}{2}((I_{01})ij - (I_{00})i, j + 1), \\ (D)ij &\approx \frac{(I_{00})ij + (I_{11})ij - (I_{10})ij - (I_{01})ij}{2}, \end{aligned}$$

### 6.3.1. Ejemplos



Figura 6.1: Imagen de Lenna, original y aproximación a primer orden.



Figura 6.2: Imagen del barco, original y aproximación a primer orden.

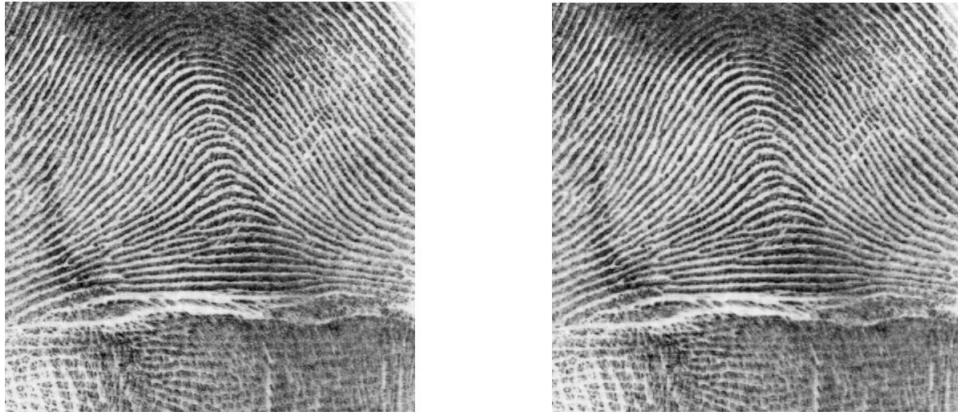


Figura 6.3: Huella digital, original y aproximación a primer orden.



Figura 6.4: Imagen de un hexágono, original y aproximación a primer orden.

## 6.4. Algoritmos para la reconstrucción de una imagen de alta resolución

Cuando tenemos un conjunto de imágenes de baja resolución, al problema se le llama *reconstrucción de una imagen de alta resolución*, mientras que cuando solo tenemos algunas imágenes de baja resolución, al problema se le conoce como *reconstrucción de una imagen de superresolución*. En ambos casos, las imágenes de baja resolución se obtienen de arreglos

de sensores, los cuales son corrimientos de cada uno con desplazamientos en subpíxeles. La reconstrucción de la imagen de alta resolución puede modelarse mediante la solución de un sistema lineal  $Lf = g$ , en donde  $L$  es el operador de convolución,  $g$  es un vector que se forma a partir de las imágenes de baja resolución y  $f$  es la imagen de alta resolución que se quiere obtener.

R. Chan et all [3], describen el modelo matemático del problema de la reconstrucción de una imagen de alta resolución como sigue. Supongamos que la imagen de una escena puede obtenerse de sensores de tamaño  $N_1 \times N_2$  píxeles. Sean  $T_1$  y  $T_2$  las longitudes reales a lo largo y a lo ancho, respectivamente y los llamaremos *sensores de baja resolución*. La región de interés puede describirse como

$$\mathbf{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 T_1 N_1, 0 \leq x_2 T_2 N_2\}.$$

El objetivo es construir una imagen de alta resolución de la misma escena usando un arreglo de sensores de baja resolución de tamaño  $K_1 \times K_2$ , es decir, queremos crear una imagen de  $\mathbf{S}$  de  $M_1 \times M_2$  píxeles, en donde  $M_1 = K_1 N_1$  y  $M_2 = K_2 N_2$ . Por lo tanto, el largo y el ancho de cada *pixel de alta resolución* será  $T_1/K_1$  y  $T_2/K_2$  respectivamente. Para conservar al razón de tamaño de la imagen reconstruida consideraremos  $K = K_1 = K_2$ .

Sea  $f(x_1, x_2)$  la intensidad de la escena en el punto  $(x_1, x_2)$  en  $\mathbf{S}$ . Reconstruir la imagen de alta resolución, significa encontrar o aproximar los valores:

$$\frac{K^2}{T_1 T_2} \int_{iT_1/K}^{(i+1)T_1/K} \int_{jT_2/K}^{(j+1)T_2/K} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad 0 \leq i < M_1, 0 \leq j < M_2,$$

el cual es la intensidad media de todos los puntos dentro del  $(i, j)$ -ésimo pixel de alta resolución:

$$(6.16) \quad \left[ i \frac{T_1}{K}, (i+1) \frac{T_1}{K} \right] \times \left[ j \frac{T_2}{K}, (j+1) \frac{T_2}{K} \right], \quad 0 \leq i < M_1, 0 \leq j < M_2.$$

A fin de obtener suficiente información para resolver la imagen de alta resolución, existen desplazamientos de subpíxeles entre los sensores en los arreglos sensores. Para el sensor  $(k_1, k_2)$ ,  $0 \leq k_1, k_2 < K$ , sus desplazamientos horizontales y verticales  $d_{k_1 k_2}^x$  y  $d_{k_1 k_2}^y$  con respecto al punto  $(0, 0)$  están dados por

$$d_{k_1 k_2}^x = \left( k_1 + \frac{1-K}{2} \right) \frac{T_1}{K} \quad \text{y} \quad d_{k_1 k_2}^y = \left( k_2 + \frac{1-K}{2} \right) \frac{T_2}{K}.$$

Para este sensor de baja resolución, la intensidad media registrada en su  $(n_1, n_2)$ -ésimo pixel esta modelada por

$$(6.17) \quad g_{k_1 k_2}[n_1, n_2] = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{T_1 n_1 + d_{k_1 k_2}^x}^{T_1(n_1+1) + d_{k_1 k_2}^x} \int_{T_2 n_2 + d_{k_1 k_2}^y}^{T_2(n_2+1) + d_{k_1 k_2}^y} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \eta k_1 k_2[n_1, n_2],$$

en donde  $0 \leq n_1 < N_1$ ,  $0 \leq n_2 < N_2$  y  $\eta k_1 k_2[n_1, n_2]$  es el ruido. Cabe señalar que la integración es sobre un área del mismo tamaño de un pixel de baja resolución.

Por otro lado

$$d_{00}^x = \left( k_1 + \frac{1-K}{2} \right) \frac{T_1}{K} = \left( \frac{1-K}{2} \right) \frac{T_1}{K},$$

entonces

$$\begin{aligned} T_1 n_1 + \frac{T_1}{2} + \left( \frac{1-K}{2} \right) \frac{T_1}{K} &= T_1 n_1 + \frac{T_1}{2} + \frac{T_1}{2K} - \frac{KT_1}{2k} \\ &= \frac{T_1}{K} \left( Kn_1 + \frac{K}{2} + \frac{1}{2} - \frac{K}{2} \right), \\ &= \frac{T_1}{K} \left( Kn_1 + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Análogamente

$$d_{00}^y = \left( k_2 + \frac{1-K}{2} \right) \frac{T_2}{K} = \left( \frac{1-K}{2} \right) \frac{T_2}{K},$$

entonces

$$T_2 n_2 + \frac{T_2}{2} + \left( \frac{1-K}{2} \right) \frac{T_2}{K} = \frac{T_2}{K} \left( Kn_2 + \frac{1}{2} \right).$$

Ahora en el caso general:

$$\begin{aligned} T_1 \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) + d_{k_1 k_2}^x &= T_1 n_1 + \frac{T_1}{2} + \left( k_1 + \frac{1-K}{2} \right) \frac{T_1}{K}, \\ &= T_1 n_1 + \frac{T_1}{2} + \frac{T_1 k_1}{2} + \frac{T_1}{2K} - \frac{KT_1}{2k}, \\ &= \frac{T_1}{K} \left( Kn_1 + \frac{K}{2} + k_1 + \frac{1}{2} - \frac{K}{2} \right), \\ &= \frac{T_1}{K} \left( Kn_1 + k_1 + \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

análogamente

$$T_2(n_2 + \frac{1}{2}) + d_{k_1 k_2}^y = \frac{T_2}{K} \left( K n_2 + k_2 + \frac{1}{2} \right),$$

por lo tanto, usando la regla del punto medio y despreciando el ruido  $\eta_{k_1 k_2}[n_1, n_2]$ , tenemos que

$$(6.18) \quad g_{k_1 k_2}[n_1, n_2] \approx f \left( T_1(n_1 + \frac{1}{2}) + d_{k_1 k_2}^x, T_2(n_2 + \frac{1}{2}) + d_{k_1 k_2}^y \right)$$

$$(6.19) \quad = f \left( \frac{T_1}{K}(K n_1 + k_1 + \frac{1}{2}), \frac{T_2}{K}(K n_2 + k_2 + \frac{1}{2}) \right).$$

Si ahora mezclamos todas las imágenes de baja resolución  $g_{k_1 k_2}$  para formar una imagen  $G$  de tamaño  $M_1 \times M_2$  asignando:

$$(6.20) \quad g[K n_1 + k_1, K n_2 + k_2] = g_{k_1 k_2}[n_1, n_2],$$

entonces

$$g[i, j] \approx f \left( \frac{T_1}{k}(i + \frac{1}{2}), \frac{T_2}{j}(i + \frac{1}{2}) \right), \quad 0 \leq i < M_1, 0 \leq j < M_2$$

el cual es el valor de  $f$  en el punto medio del  $i$ -ésimo pixel de alta resolución en (6.16). Por lo tanto,  $g$  es una aproximación de  $f$ .

Para obtener una imagen que sea mejor que la imagen de alta resolución observada  $g$ , tendremos que resolver (6.17), primero discretizando usando la regla de cuadratura rectangular. Equivalentemente, suponemos que para cada  $(i, j)$ -ésimo pixel de alta resolución dado en (6.16), la intensidad de  $f$  es constante y es igual a  $f[i, j]$  para cada punto en ese pixel. Después integrando en (6.17) y usando el reordenamiento (6.20), obtenemos un sistema de ecuaciones lineales que relaciona los valores desconocidos de  $f[i, j]$  con los valores de los pixeles de baja resolución dados por  $g[i, j]$ . Este sistema lineal no es cuadrado, debido a que la evaluación de  $g_{k_1 k_2}[n_1, n_2]$  en (6.17) involucra puntos fuera de la región de interés  $S$ . Por lo tanto, tenemos mas incógnitas que valores y el sistema esta indeterminado.

Para compensar esto, imponemos condiciones de frontera sobre  $f$  para  $x_i$  fuera del dominio. Una manera estándar es suponer que  $f$  es periódica afuera

$$(6.21) \quad f(x + iT_1 N_1, y + jT_2 N_2) = f(x, y), \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Por simplicidad, solo desarrollaremos estos algoritmos para condiciones de frontera periódica.

Usando la condición de frontera periódica (6.21) y ordenando los valores discretizados de  $f$  y  $g$  renglón por renglón, obtenemos un sistema lineal de tamaño  $M_1 M_2 \times M_1 M_2$  de la forma

$$(6.22) \quad L\mathbf{f} = \mathbf{g}.$$

La matriz de la parte borrosa puede escribirse como

$$(6.23) \quad L = L^x \otimes L^y,$$

en donde,  $\otimes$  es el producto tensorial de Kronecker y  $L^x$  es la matriz circulante de tamaño  $M_1 \times M_1$  cuyo primer renglón está dado por

$$\frac{1}{K} \left[ 1, \dots, 1, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, 1 \right].$$

Las primeras  $\frac{K}{2}$  entradas son igual a 1. Las últimas  $\frac{K}{2}$  entradas distintas de cero están allí debido a la hipótesis periódica sobre  $f$ . La matriz de la parte borrosa  $L^y$  de tamaño  $M_2 \times M_2$  se define de manera similar.

Notemos que la matriz  $L$  es una matriz *block-circulant-circulant-block*. Por lo tanto (6.22) puede resolverse usando tres transformadas rápidas de Fourier bidimensionales en  $O(M_1 M_2 \log(M_2 M_2))$  operaciones, véase [7]. A manera de ejemplos R. Chan et al [3], proponen las matrices  $L^x$  para los casos de arreglos de sensores de  $2 \times 2$  y  $4 \times 4$  vienen dados respectivamente por

$$(6.24) \quad L_2 \equiv \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 2 & 1 \\ 1 & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } L_4 \equiv \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & & 1 & & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & & & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & & & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & & & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Debido a que (6.17) es un proceso promediante, el sistema (6.22) está mal condicionado y es susceptible a ruido. Para remediar esto, proponen la siguiente regularización de Tikhonov:

$$(6.25) \quad (L^* L + \beta R)\mathbf{f} = L^* \mathbf{g}.$$

$R$  es un operador de regularización y  $\beta > 0$  es el parámetro de regularización, véase [7].



## 6.5. Reconstrucción

Vamos a analizar el modelo (6.22). Siempre que (6.22) es un proceso promediante, las matrices en (6.24) pueden considerarse como un filtro pasa-bajas que actúa sobre la imagen  $f$  con una mascara de refinamiento dada por un producto tensorial, digamos  $a$ . Sea  $\phi$  la función refinable bivariada de producto tensorial con dicha mascara de refinamiento. Recordemos que una función  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  es *refinable* si ésta satisface

$$\phi = 4 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} a(\alpha) \phi(2 \cdot - \alpha).$$

A la función refinable  $\phi$  también se le conoce como una función de escalamiento. La sucesión  $a$  se le denomina *mascara de refinamiento*. El símbolo de la sucesión  $a$  está definido como

$$\hat{a}(\omega) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} a(\alpha) e^{-i\alpha\omega}.$$

La función  $\phi$  es *estable* si sus corrimientos (traslaciones enteras) forman un sistema de Riesz (5.1), es decir, existen constantes  $0 \leq c \leq C < \infty$ , tales que para cualquier sucesión  $q \in l_2(\mathbb{Z}^2)$ ,

$$(6.26) \quad c\|q\| \leq \left\| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} q(\alpha) \phi(\cdot - \alpha) \right\| \leq C\|q\|$$

A las funciones estables  $\phi$  y  $\phi^d$  se les llama un *par dual* cuando satisfacen

$$\langle \phi, \phi^d(\cdot - \alpha) \rangle := \begin{cases} 1, & \alpha = 0; \\ 0, & \alpha \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \end{cases}$$

Vamos a denotar a la mascara de refinamiento de  $\phi^d$  por  $a^d$ .

Para una función estable refinable soportada compactamente  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  dada, definimos a  $S(\phi) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$  como el subespacio invariante ante corrimientos, cerrado y el mas pequeño, generado por  $\phi$  y definimos

$$S^k(\phi) := \{u(2^k \cdot) : u \in S(\phi)\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces la sucesión  $S^k(\phi)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , forma un análisis multirresolución de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . La sucesión  $S^k(\phi^d)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , también forma un análisis multirresolución de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

El producto tensorial de las funciones refinables univariadas y las wavelets utilizadas serán derivadas de los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 6.1.** Para arreglos sensores de  $2 \times 2$ , usando la regla rectangular para (6.17), obtenemos  $L_2$  en (6.24). La mascara de refinamiento correspondiente  $m$  es el spline lineal por partes:

$$m(-1) = \frac{1}{4}, m(0) = \frac{1}{2}, m(1) = \frac{1}{4},$$

y  $m(\alpha) = 0$  para todas las otras  $\alpha$ . Los términos distintos de cero de la mascara dual de  $m$  usados son:

$$m^d(-2) = -\frac{1}{8}, m^d(-1) = \frac{1}{4}, m^d(0) = \frac{3}{4}, m^d(1) = \frac{1}{4}, m^d(2) = -\frac{1}{8}.$$

En general, los filtros producto tensorial bivariado para la dilatación  $2I$ , donde  $I$  es la matriz identidad, son generados como sigue. Sean  $\phi$  y  $\phi^d$  un par dual de las funciones refinables univariadas con sus respectivas mascaras de refinamiento  $m$  y  $m^d$ . Entonces, las wavelets biortonormales  $\psi$  y  $\psi^d$  están definidas como

$$\psi := 2 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} r(\alpha) \phi(2 \cdot -\alpha) \quad \text{y} \quad \psi^d := 2 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} r^d(\alpha) \phi^d(2 \cdot -\alpha),$$

en donde

$$r(-1) = \frac{1}{8}, r(0) = \frac{1}{4}, r(1) = -\frac{3}{4}, r(2) = \frac{1}{4}, r(3) = \frac{1}{8}$$

y

$$r^d(0) = \frac{1}{4}, r^d(1) = -\frac{1}{2}, r^d(2) = \frac{1}{4}$$

son las mascaras wavelet. El par dual del producto tensorial de los símbolos de refinamiento están dados por  $\hat{a}(\omega) = \hat{m}(\omega_1)\hat{m}(\omega_2)$ ,  $\hat{a}^d(\omega) = \hat{m}^d(\omega_1)\hat{m}^d(\omega_2)$  y los correspondientes símbolos wavelet son  $\hat{b}_{(0,1)}(\omega) = \hat{m}(\omega_1)\hat{r}(\omega_2)$ ,  $\hat{b}_{(0,1)}^d(\omega) = \hat{m}^d(\omega_1)\hat{r}^d(\omega_2)$ ,  $\hat{b}_{(1,0)}(\omega) = \hat{r}(\omega_1)\hat{m}(\omega_2)$ ,  $\hat{b}_{(1,0)}^d(\omega) = \hat{r}^d(\omega_1)\hat{m}^d(\omega_2)$ ,  $\hat{b}_{(1,1)}(\omega) = \hat{r}(\omega_1)\hat{r}(\omega_2)$ ,  $\hat{b}_{(1,1)}^d(\omega) = \hat{r}^d(\omega_1)\hat{r}^d(\omega_2)$ , en donde  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ .

Esta wavelet tiene una dilatación  $2I$ . En el ejemplo siguiente, aparecen las mascaras wavelet y refinable con dilatación  $4I$  las cuales son utilizadas para generar las matrices para sensores de  $4 \times 4$ .

**Ejemplo 6.2.** Para arreglos de  $4 \times 4$ , usando la regla rectangular en (6.17) obtenemos  $L_4$  en (6.24). La mascara correspondiente es

$$m(\alpha) = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \quad \alpha = -2, \dots, 2,$$

con  $m(\alpha) = 0$  para todas las otras  $\alpha$ . Ésta es la mascara de una función refinable estable  $\phi$  con una dilatación de 4. Los términos diferentes de cero de la mascara dual de  $m$  son

$$m^d(\alpha) = -\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \quad \alpha = -3, \dots, 3.$$

Los términos distintos de cero de las mascaras wavelet correspondientes son

$$\begin{aligned} r_1(\alpha) &= -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \quad \alpha = -2, \dots, 2, \\ r_2(\alpha) &= -\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{5}{16}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \quad \alpha = -2, \dots, 4, \\ r_3(\alpha) &= \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{16}, 0, \frac{7}{16}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \quad \alpha = -2, \dots, 4. \end{aligned}$$

Las mascaras wavelet duales son

$$\begin{aligned} r_1^d(\alpha) &= (-1)^{1-\alpha} r_3(1-\alpha), \\ r_2^d(\alpha) &= (-1)^{1-\alpha} m(1-\alpha), \\ r_3^d(\alpha) &= (-1)^{1-\alpha} r_1(1-\alpha), \end{aligned}$$

para una  $\alpha$  apropiada.

## 6.6. La función de reconstrucción

Siempre que  $S^k(\phi^d)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  forma un análisis multirresolución de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que los valores de los pixeles de la imagen original son los coeficientes de una función  $f$  en  $S^k(\phi^d)$  para cierta  $k$ . Los valores de los pixeles de las imágenes de baja resolución pueden considerarse como los coeficientes de una función  $g$  en  $S^{k-1}(\phi^d)$  y sus  $\frac{1}{2^k}$  trasladados, es decir,  $g$  está representado por  $\phi^d(2^{k-1}(\cdot - \alpha/2^k))$  con  $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ . Las imágenes de baja resolución conservan la mayor parte de la información de frecuencias bajas de  $f$  y la información de frecuencias altas de  $f$  oculta en las imágenes de baja resolución en  $f$  es recogida por el filtro pasa-bajas  $\alpha$ . Para recuperar  $f$ , la información de frecuencias altas de  $f$  oculta en las imágenes de baja resolución será recogida y combinada con la información de frecuencias bajas para restaurar a  $f$ . Recogeremos el contenido de frecuencias altas iterativamente usando la descomposición wavelet y un algoritmo de reconstrucción.

Para sensores de  $2 \times 2$ , el análisis multirresolución  $S^k(\phi^d)$  utilizado viene de una función refinable con una matriz de dilatación  $2I$ . En general, sensores de  $K \times K$  pueden analizarse

mediante el análisis multirresolución generado por una función refinable con matriz de dilatación  $K \cdot I$ . Por simplicidad, damos el análisis para el caso en que la matriz de dilatación es  $2I$  y  $k = 1$ .

Sea  $f \in S^1(\phi^d)$ . Entonces

$$(6.27) \quad f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \langle f, 2\phi(2 \cdot -\alpha) \rangle 2\phi^d(2 \cdot -\alpha) := 2 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} v(\alpha) \phi^d(2 \cdot -\alpha).$$

Los números  $v(\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^2$  son los valores de los píxeles de la imagen de alta resolución que estamos buscando. El conjunto  $\{(a * v)(\alpha)\}$  es la imagen de alta resolución observada. Como  $\phi^d$  es refinable,  $a * v$  es la sucesión de coeficientes de la función  $g$  representada por  $\phi^d(\cdot - \alpha/2)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ , en  $S^1(\phi^d)$ . Vamos a llamar a  $g$  la *función observada*:

$$(6.28) \quad g := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} (a * v)(\alpha) \phi^d(\cdot - \alpha/2).$$

Cuando sólo se tiene  $a * v$ , para recuperar  $f$ , primero encontramos  $v$  a partir de  $a * v$ , entonces, derivamos  $f$  usando la base  $2\phi^d(2 \cdot -\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}^2$  mediante (6.27). Un primer algoritmo iterativo, en el dominio de Fourier, es el siguiente: dada  $\widehat{a * v} = \widehat{a} \widehat{v}$  encontrar  $\widehat{v}$  con el propósito de restaurar a  $f$ .

Denotemos  $\mathbb{Z}_2^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ . De la teoría de wavelets biortogonales [5], tenemos que

$$(6.29) \quad \widehat{a}^d \widehat{a} + \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^2 \setminus \{(0,0)\}} \widehat{b}_v^d \widehat{b}_v = 1$$

Cabe señalar que cuando la función refinable  $\phi$  del kernel de convolución  $a$  y sus corrimientos forman un sistema ortonormal, entonces (6.29) se cumple tomando  $\widehat{a}^d = \widehat{a}$  y  $\widehat{b}_v^d = \widehat{b}_v$ . Esto nos lleva a wavelets ortornomales. Cuando  $\phi$  y sus corrimientos forman sólo un sistema de Riesz, tenemos que usar wavelets biortogonales.

De (6.29), tenemos que

$$\widehat{v} = \widehat{a}^d \widehat{a * v} + \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^2 \setminus \{(0,0)\}} \widehat{b}_v^d \widehat{b}_v \right) \widehat{v}.$$

Por lo tanto, se tiene el siguiente algoritmo.

**Algoritmo 1.**

1. Tómesese  $\widehat{v}_0 \in L^2[-\pi, \pi]^2$ ;

2. Iterar hasta la convergencia:

$$(6.30) \quad \hat{v}_{n+1} = \widehat{\hat{a}^d a} * v + \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^d \setminus \{(0,0)\}} \widehat{\hat{b}_v^d \hat{b}_v} \right) \hat{v}.$$

El primer sumando del lado derecho de (6.30) representa la aproximación de las componentes de frecuencias bajas de  $f$  y el segundo sumando mejora la aproximación de frecuencias altas.

Dado  $\hat{v}_n$ ,  $f_n$  se define mediante su transformada de Fourier como:

$$(6.31) \quad \hat{f}_n(\cdot) := \hat{v}_n(\cdot/2) \hat{\phi}^d(\cdot/2) \in S^1(\phi^d).$$

Las funciones  $f_n$  convergen a la función  $f$ , véase [3, Proposición 3.1].

Cuando hay ruido en los datos dados  $a * v$ , podemos restar algunas componentes de frecuencia alta de  $\hat{v}_n$  en cada iteración para reducir el ruido, siempre y cuando el ruido se encuentre en las componentes de frecuencia alta. Entonces se obtiene el siguiente algoritmo modificado:

**Algoritmo 2.**

1. Tómesese  $\hat{v}_0 \in L^2[-\pi, \pi]^2$ ;
2. Iterar hasta la convergencia:

$$(6.32) \quad \hat{v}_{n+1} = \widehat{\hat{a}^d a} * v + (1 - \beta) \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^d \setminus \{(0,0)\}} \widehat{\hat{b}_v^d \hat{b}_v} \right) \hat{v}, \quad 0 < \beta < 1.$$

En el proceso de filtrado de ruido, las componentes de frecuencias altas son penalizadas uniformemente por el factor  $(1 - \beta)$ , lo cual suaviza la señal original.

## 6.7. La reconstrucción de la imagen

Denotaremos por  $L$ ,  $L^d$ ,  $H_v^d$  y  $H_v$  las matrices generadas por los símbolos de refinamiento y las mascararas wavelets  $\hat{a}$ ,  $\widehat{\hat{a}^d}$ ,  $\hat{b}_v$  y  $\widehat{\hat{b}_v^d}$  respectivamente. Debido a las condiciones de frontera periódicas, la matriz  $L$  es como aparece en (6.24). Utilizando estas matrices, podemos reescribir (6.29) como

$$(6.33) \quad L^d L + \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^d \setminus \{(0,0)\}} H_v^d H_v = I.$$

También podemos reescribir la expresión (6.30):

$$(6.34) \quad \mathbf{f}_{n+1} = L^d \mathbf{g} + \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^2 \setminus \{(0,0)\}} H_v^d H_v \right) \mathbf{f}_n,$$

en donde  $\mathbf{g} \sim a * v$  es la imagen de alta resolución observada en (6.22) y  $\mathbf{f}_n$  son las aproximaciones de  $\mathbf{f}$  en la  $n$ -ésima iteración.

Reescribiendo (6.34):

$$\mathbf{f}_{n+1} - \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^2 \setminus \{(0,0)\}} H_v^d H_v \right) \mathbf{f}_n = L^d \mathbf{g},$$

lo cual es una interacción estacionaria resolviendo la ecuación matricial

$$\left[ I - \left( \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^2 \setminus \{(0,0)\}} H_v^d H_v \right) \right] \mathbf{f}_n = L^d \mathbf{g}.$$

Utilizando (6.33) obtenemos:

**Algoritmo 1 en forma matricial.**

$$(6.35) \quad L^d L \mathbf{f} = L^d \mathbf{g}.$$

Para el algoritmo 2, también se tiene una iteración estacionaria para la ecuación matricial:

$$\left( L^d L + \beta \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^2 \setminus \{(0,0)\}} H_v^d H_v \right) \mathbf{f}_n = L^d \mathbf{g},$$

en donde,  $\beta$  es el parámetro de regularización. Utilizando (6.33) obtenemos:

**Algoritmo 2 en forma matricial.**

$$(6.36) \quad \left( L^d L + \frac{\beta}{1 - \beta} I \right) \mathbf{f} = \frac{\beta}{1 - \beta} L^d \mathbf{g}.$$

### 6.7.1. Ejemplos



Figura 6.5: Imagen de Lenna submuestreada. Imagen de Lenna superresuelta mediante el algoritmo 1 con  $\beta = 0.25$ . Imagen de Lenna superresuelta mediante el algoritmo 2 con  $\beta = 0.59$ .

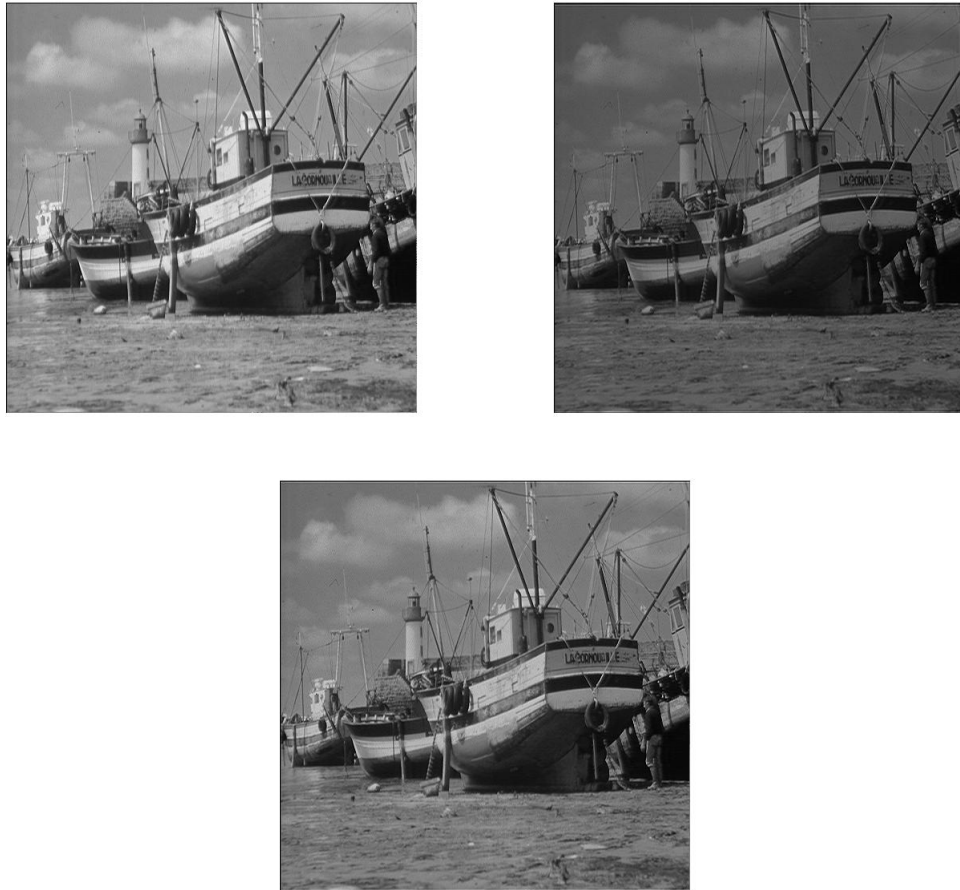


Figura 6.6: Imagen del barco submuestreada. Imagen del barco superresuelta mediante el algoritmo 1 con  $\beta = 0.21$ . Imagen del barco superresuelta mediante el algoritmo 2 con  $\beta = 0.59$ .



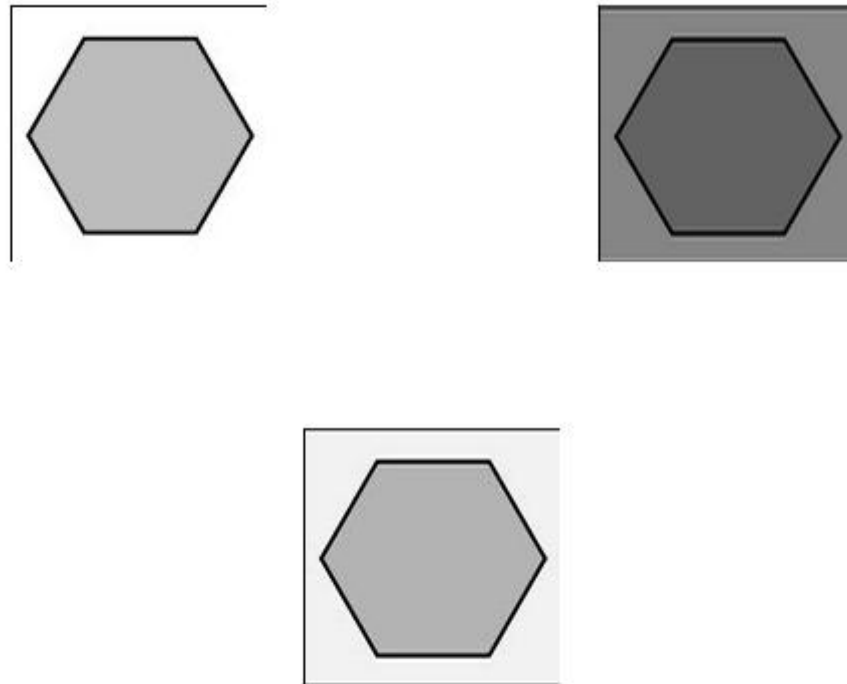


Figura 6.7: Imagen del hexágono submuestreada. Imagen del hexágono superresuelta mediante el algoritmo 1 con  $\beta = 0.61$ . Imagen del hexágono superresuelta mediante el algoritmo 2 con  $\beta = 0.9$ .



## Conclusiones y trabajo futuro

La reconstrucción de una superresolución utilizando series de Taylor ofrece un método rápido ya que a partir de una única imagen, se generan las otras tres necesarias para calcular la transformada wavelet inversa, sólo que como no hay ningún tipo de filtrado previo puede amplificarse el ruido. Por otro lado, debido a la construcción de la transformada wavelet, no es necesario usar alguna técnica de regularización, además de que la reconstrucción se obtiene en un solo paso.

El problema de la reconstrucción de una superresolución se resuelve primero suponiendo que se puede obtener una matriz de la parte borrosa, la cual es de bloque circulante y como se obtiene un sistema de ecuaciones mal condicionado que es susceptible al ruido, entonces este se resuelve utilizando la regularización de Tikhonov, en donde el operador de regularización es la matriz identidad; con ésta metodología, se tiene ahora un filtrado del ruido.

Debido a que la matriz de la parte borrosa es un proceso promedio, entonces puede tomarse como un filtro pasa-bajas. Se construye la función de escalamiento y su par dual, los cuales tienen asociados su máscara de refinamiento. Los subespacios generados por estas funciones de escalamiento forman cada uno un análisis multirresolución; las máscaras de refinamiento están dadas por un spline lineal respectivamente. Las funciones wavelet se generan utilizando las funciones de escalamiento anteriores. Las imágenes original y estimada pueden expresarse en términos de las funciones de escalamiento y de su dual.

La reconstrucción de la superresolución utilizando ahora regularización de Tikhonov, cuyo parámetro permite controlar el proceso, para valores cercanos a cero genera aliasing mientras que para valores mayores a uno se pierde la imagen. El algoritmo que utiliza simultáneamente regularización de Tikhonov, reconstrucción de la superresolución con una wavelet y su dual, es más estable que el método anterior, ya que presenta poco aliasing para casi cualquier valor del parámetro de regularización de Tikhonov además de que la reconstrucción de la superresolución obtenida es mucho más parecida a la imagen original.



# Bibliografía

- [1] P. S. ADDISON, *The Illustrated Wavelet Transform Handbook*, IOP Publishing, 2002.
- [2] R. CARMONA AND W. L. HUANG, *Practical Time-Frequency Analysis Gabor and Wavelet Transforms with an Implementation in S*, Academic Press, USA, 1998.
- [3] R. H. CHAN, T. F. CHAN, L. SHEN, AND Z. SHEN, *Wavelet algorithms for high-resolution image reconstruction*, SIAM Journal on Scientific Computing, 24 (2003), pp. 1408–1432.
- [4] C. K. CHUI, *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis*, SIAM, 1997.
- [5] I. DAUBECHIES, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [6] L. DEBNATH, *Wavelet Transforms and Their Applications*, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [7] R. C. GONZÁLEZ, R. E. WOODS, AND S. L. EDDINS, *Digital image processin using Matlab*, Pearson Prentice Hall, 2004.
- [8] J. C. GOSWAMI AND A. K. CHAN, *Fundamentals of Wavelets Theory Algorithms and Applications*, John Wiley and Sons, New York, 2001.
- [9] E. HERNANDEZ AND G. WEIS, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, 1996.
- [10] M. IRANI AND S. PELEG, *Super resolution from image sequences*, ICPR, 2 (1990), pp. 115–120.
- [11] S. MALLAT, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, 2 ed., 1998.
- [12] S. G. MALLAT, *A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11 (July 1989), pp. 674–693.

- [13] Y. MEYER AND R. D. RYAN, *Wavelets, Algorithms and Applications*, SIAM, Philadelphia, 1993.
- [14] M. A. PINKSKY, *Introducción al análisis de Fourier y las ondoletas*, Thomson, 2003.
- [15] J. G. PROAKIS AND D. G. MANOLAKIS, *Tratamiento digital de señales*, Pearson, Prentice Hall, cuarta ed., 2007.
- [16] G. STRANG AND T. NGUYEN, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley–Cambridge Press, 1996.
- [17] D. STRANNEBY, *Digital Signal Processing: DSP and Applications*, Newnes, Great Britain, 2001.
- [18] Y. Y. TANG, L. H. YANG, J. LIU, AND H. MA, *Wavelet Theory and Its Application to Pattern Recognition*, World Scientific, 2000.
- [19] C. S. TONG AND K. T. LEUNG, *Super-resolution reconstruction using haar wavelet estimation*, in *Wavelet Analysis and Applications*, B. V. Basel, ed., 2004, pp. 419–430.
- [20] R. Y. TSAI AND T. S. HUANG, *Multiframe image restoration and registration*, in *Advances in Computer Vision and Image Processing*, J. Press, ed., vol. 1, 1984, pp. 317–339.
- [21] A. VRETBLAD, *Fourier Analysis and Its Applications*, Springer-Verlag, 2003.
- [22] J. S. WALKER, *A primer on wavelets and their applications*, Chapman & Hall/CRC, 2 ed., 2008.
- [23] M. WEEKS, *Digital signal processing using MATLAB and Wavelets*, Hingham, Massachusetts, 2006.